انتگرال چندگانه

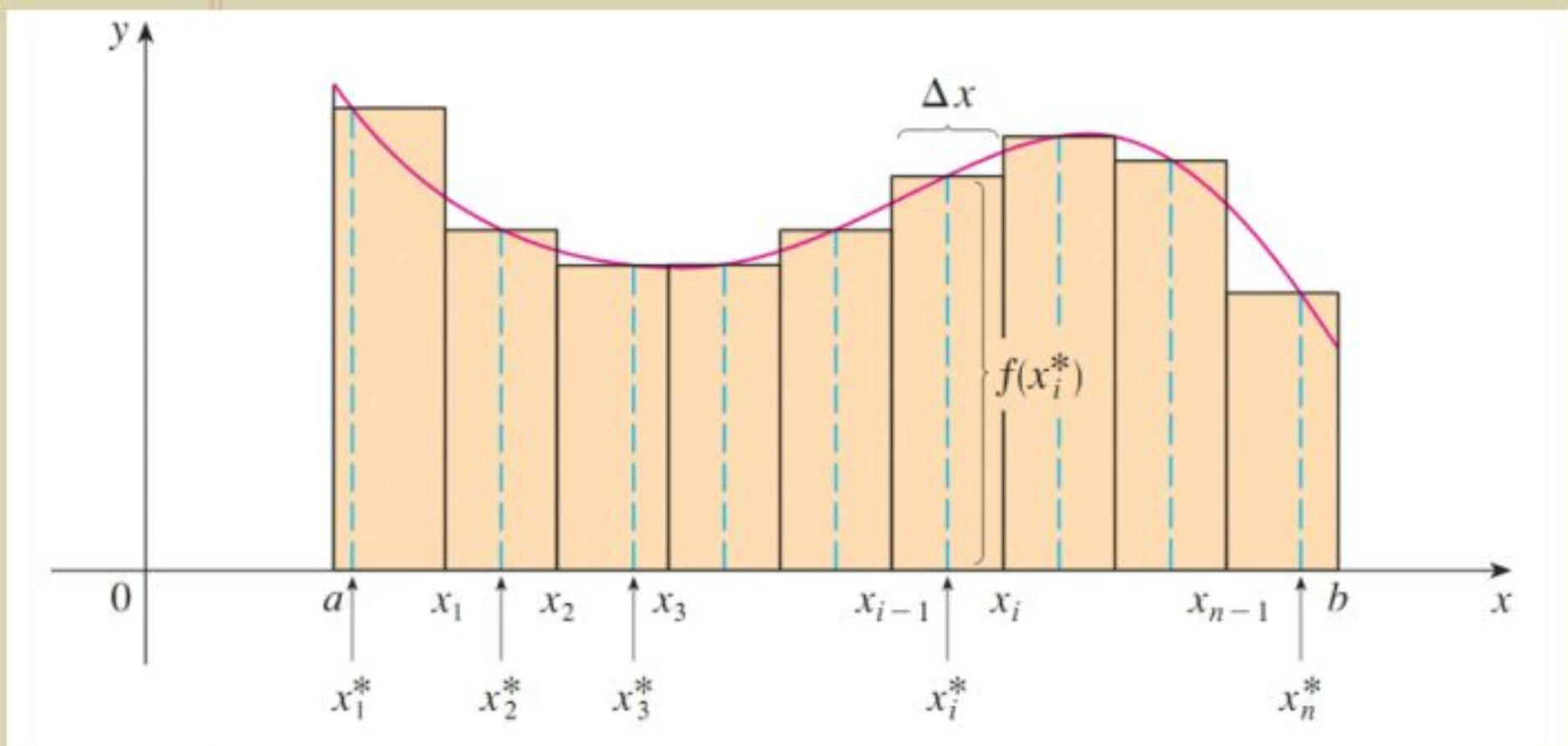
ابتدا مفهوم انتگرال معین توابع یک متغیره را مرور می‌کنیم.

اگر $f(x)$ روی $a \leq x \leq b$ تعریف شده باشد با تقسیم بازه $[a,b]$ به n زیربازه $[x_{i-1}, x_i]$ با طول برابر $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ و با انتخاب نقطه‌ای مانند x_i^* در این زیربازه‌ها سپس با تشکیل مجموع ریمان

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

و میل دادن $n \to \infty$ (یا $\Delta x \to 0$) انتگرال معین f از a تا b به دست می‌آید.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$



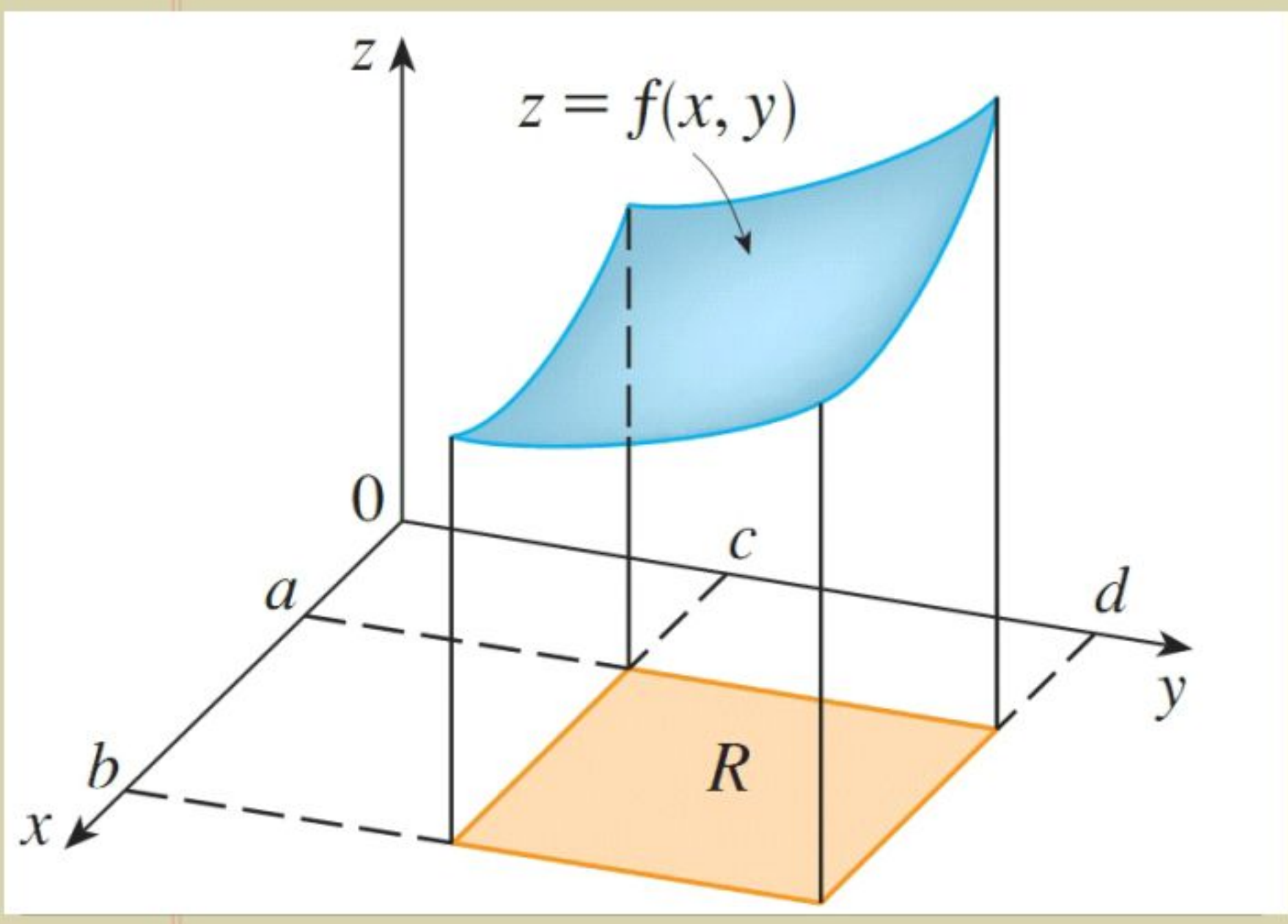
به روش مشابه برای تابع دو متغیره $z = f(x, y)$ که روی مستطیل بسته

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b , c \leq y \leq d \}$$

تعریف شده می‌خواهیم حجم

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq f(x, y) , (x, y) \in \mathbb{R}^2 \}$$

را به دست آوریم.



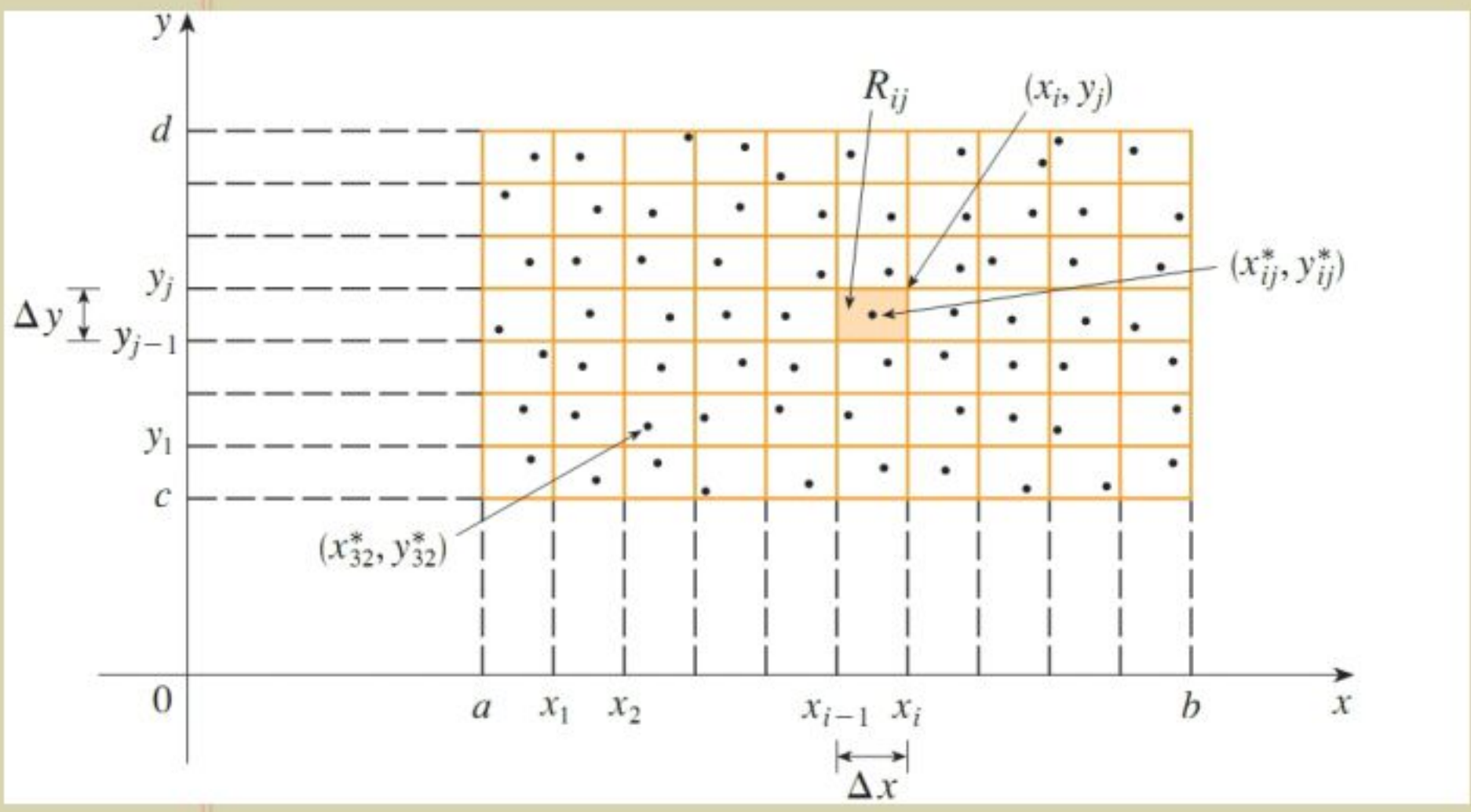
گام اول این است که مستطیل R را به زیرمستطیل هایی تقسیم کنیم برای این کار بازه $[a,b]$ را به m زیربازه $[x_{i-1}, x_i]$ با طول برابر $\Delta x = \frac{b-a}{m}$ و بازه $[c,d]$ را به n زیربازه $[y_{j-1}, y_j]$ با طول برابر $\Delta y = \frac{d-c}{n}$ تقسیم می‌کنیم. و با کشیدن خط‌های موازی محورها از نقطه انتهایی این زیربازه‌ها مانند شکل زیر، زیرمستطیل های

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] =$$

$$= \{(x,y) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i \ , \ y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$$

را تشکیل می‌دهیم که مساحت هر کدام $\Delta A = \Delta x \Delta y$ می‌باشد.

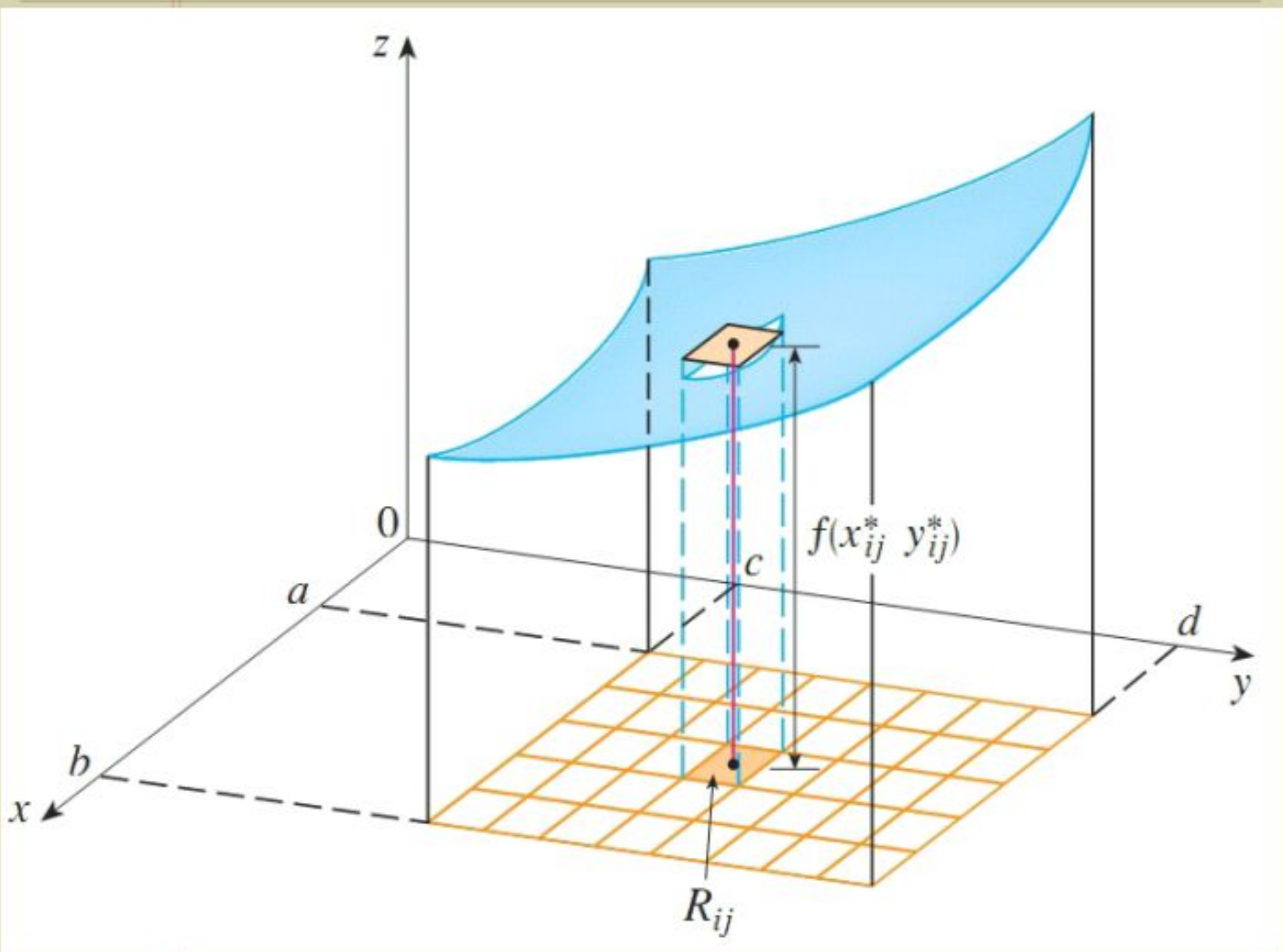
اگر از هر مستطیل R_{ij} نقطه (x^*_{ij}, y^*_{ij}) را انتخاب کنیم



آنگاه مکعب باریکی که قاعده آن R_{ij} و ارتفاع آن $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$ است دارای حجم

$$f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A$$

خواهد بود.



با انجام این روش برای تمام زیرمستطیل‌ها، مجموع حجم مکعب مستطیل‌های باریک تقریبی از حجم S را می‌دهد.

یعنی: