جلسه 1 — ماتریس ها (Matrices) — 1401/06/27

تعریف: یک ماتریس $m \times n$ دارای m ردیف و n ستون است و به صورت زیر نشان داده می شود

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

a_{ij} را المان های ماتریس می نامند که در آن $i = 1, 2, \ldots, m$ و $j = 1, 2, \ldots, n$ است.

دو ماتریس مساوی: شرط مساوی بودن دو ماتریس هم درجه (تعداد سطر و ستون برابر) بودن است و تمام المان های آنها باید نظیر به نظیر مساوی باشند یعنی:

$$A = B \Rightarrow a_{ij} = b_{ij}$$

جمع ماتریس ها: در جمع و تفریق ماتریس ها عمل جبری مربوطه روی المان های آنها صورت می گیرد

$$A = (a_{ij}) \qquad B = (b_{ij})$$

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

مثال 1)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} + B = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 5 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

ضرب یک عدد در یک ماتریس: تمام اعداد ماتریس در آن عدد ضرب می شود

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})$$

مثال ۲)

$$\lambda = 4 \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda A = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 16 \\ -12 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

ضرب ماتریس ها: از ضرب ماتریس $A(m \times n)$ در ماتریس $B(n \times p)$ ماتریس $C(m \times p)$ حاصل می شود که المان های آن برابر است با:

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj}$$

مثال ۳)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A \times D = \begin{bmatrix} 2\times3 + 1\times2 + 4\times4 & 2\times5 + 1\times(-1) + 4\times2 \\ -3\times3 + 0\times2 + 2\times4 & -3\times5 + 0\times(-1) + 2\times2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 17 \\ -1 & -11 \end{bmatrix}$$

در حالت کلی $A \times B \neq B \times A$ است و روابط زیر را داریم:

$$A(BC) = (AB)C$$

برای ضرب کردن یک ماتریس در خودش باید ماتریس مربعی باشد یعنی سطر و ستون آن با هم برابر باشد.

$A \times A = A^2$

ترانهاده (Transpose) یک ماتریس: اگر جای سطر و ستون ماتریس عوض شود ماتریس حاصل را ترانهاده ماتریس اوّلیه می گویند.

$A = (a_{ij})$

$A^T = (a_{ji})$

مثال 4)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

همچنین روابط زیر برقرار اند:

$(A+B)^T = A^T + B^T$

$(A \times B)^T = B^T \times A^T \quad , \quad (A^T)^T = A$

ماتریس متقارن (symmetric): ماتریس مربعی A متقارن است اگر:

$A^T = A$

مثال 5)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Subject
Date

مزدوج مختلط یک ماتریس Complex Conjugate of a Matrix

اگر المان یک ماتریس یعنی a_{ij} با Conjugate آنها یعنی $\bar{a}_{ij}$ تعریف شود ماتریس حاصل ماتریس Conjugate نام دارد و با $\bar{A}$ نشان داده می‌شود.

$a_{ij} = \alpha + i\beta \qquad \bar{a}_{ij} = \alpha - i\beta$

Hermitian Matrix

اگر ماتریس مربعی A با ترانهاده‌ی ماتریس مزدوج آن برابر باشد، ماتریس Hermitian نامیده می‌شود.

$A = (\bar{A})^T$

مثال 6) نشان دهید ماتریس A، Hermitian است.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (\bar{A})^T = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

Trace of a Matrix

مجموع عناصر قطری ماتریس مربعی A را Trace آن می‌گویند

$$Trace = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Subject
Date

مثال 7)

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad Trace = 5+1+2=8$$

Diagonal Matrix

ماتریس قطری ماتریسی است که غیر از عناصر قطری آن بقیه عناصر صفر اند

$a_{ij}=0$ for $i\neq j$

Unit Matrix

ماتریس واحد، ماتریس قطری ای است که عناصر قطری آن 1 باشند و آن را با I نشان می دهند.

$AI=IA \quad , \quad I^n=I \quad n=1,2,3,\ldots$

Zero or Null Matrix

ماتریسی است که تمام المان هایش صفر است

$A+O=A$

Determinant

دترمینان

دترمینان ماتریس مربعی A را به صورت زیر نمایش می دهند

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

برای محاسبه ی دترمینان یک ماتریس ابتدا به چند تعریف می پردازیم.

کهاد (Minor) : اگر a_{ij} المان های Δ باشند یک دترمینان که از حذف سطر و ستون مربوط به a_{ij} با یک درجه کمتر $(n-1)$ بدست می آید آن را کهاد المان a_{ij} می گویند

مثال 8) کهاد مربوط به a_{23} را در دترمینان زیر بدست آورید.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{Minor } a_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

همسازه (Cofactor): اگر minor المان a_{ij} را در $(-1)^{i+j}$ ضرب کنیم نتیجه را همسازه المان a_{ij} می گویند و آن را با A_{ij} نشان می دهند

دترمینان : برای بدست آوردن دترمینان یک ماتریس یک ردیف یا یک ستون را انتخاب کرده و مجموع حاصل ضرب المان های آن ردیف یا ستون را در همسازه های مربوط هر المان محاسبه می کنیم

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner