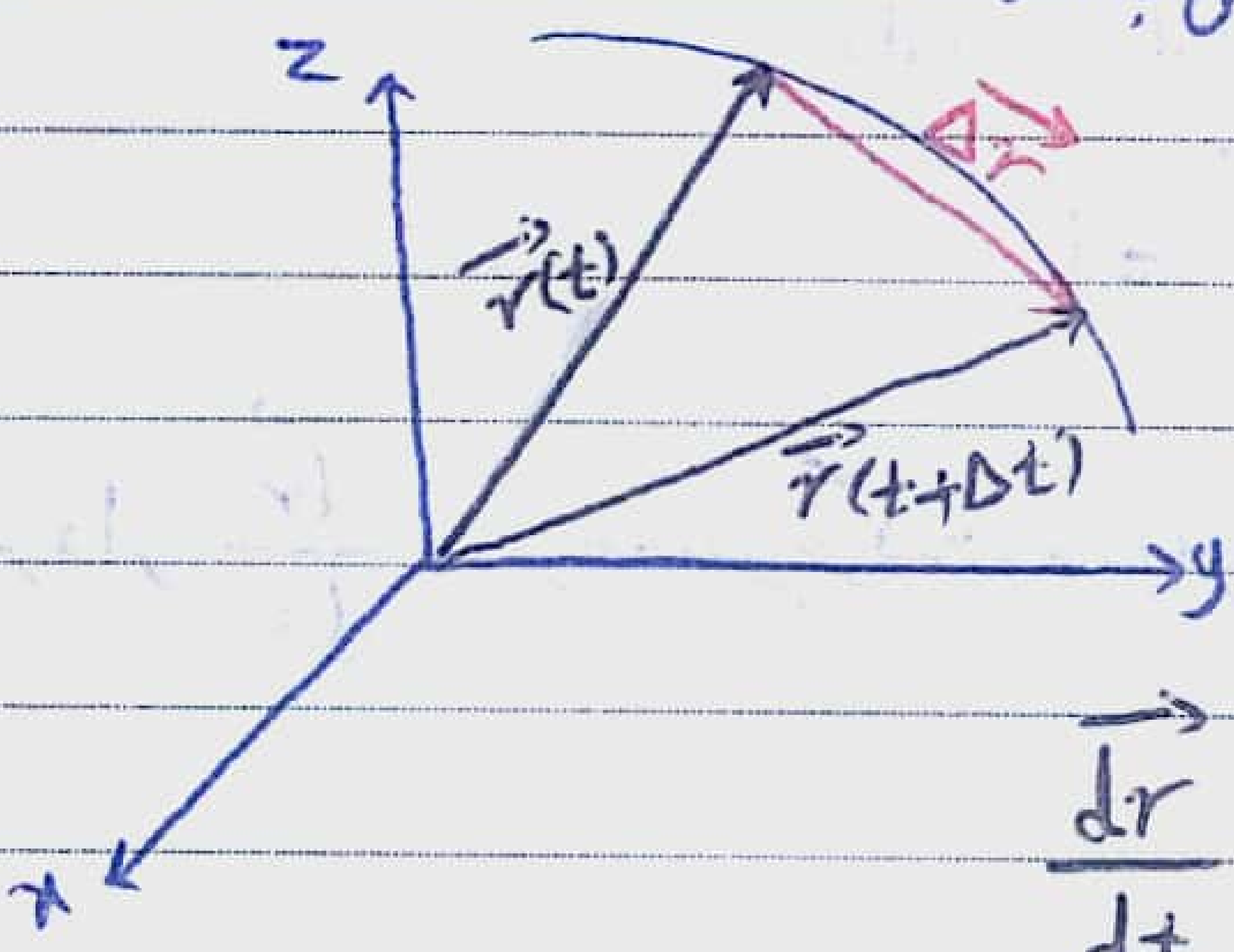
علم سینتیک: مطالعه حرکت ذره یا جسم با در نظر گرفتن عوامل حرکت مثل نیرو، گشتاور و انرژی. و روابط بین این عوامل با پارامترهای سینماتیکی مورد توجه است.

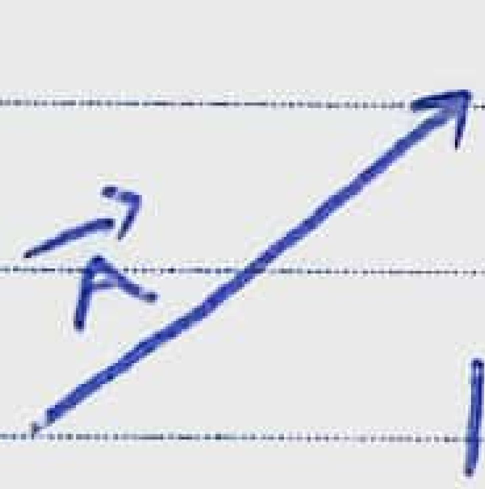
فرض ذره‌ای در لحظه t دارای بردار موقعیت $\vec{r}(t)$ و در لحظه $t+\Delta t$ دارای بردار موقعیت $\vec{r}(t+\Delta t)$ می‌باشد.



با میل کردن Δt به سمت صفر بردار $\frac{\vec{dr}}{dt}$ بر مسیر حرکت مماس است.

$$\frac{\vec{dr}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}$$

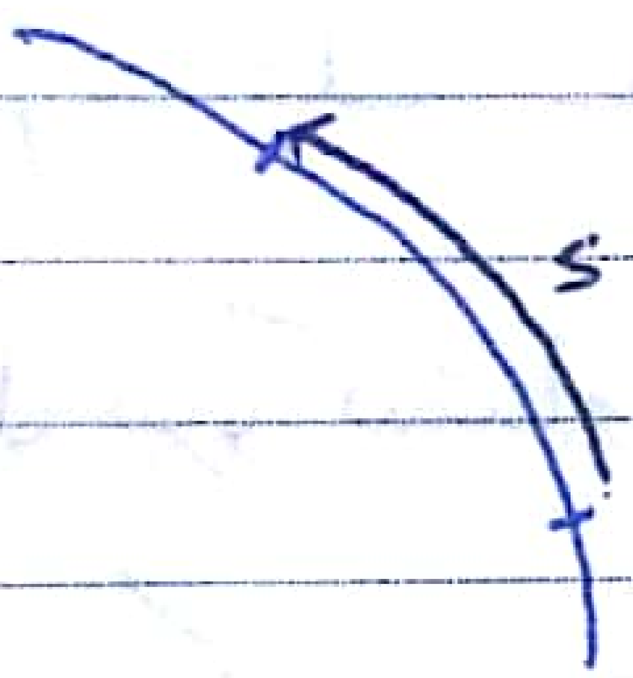
فرض: بردار دلخواه $\vec{A}$ دارای طول ثابت است.



$|\vec{A}| = Cte$ $\qquad$ $\vec{A}.\vec{A} = |A|^2 = Cte$

$\vec{A}.\vec{dA} + \vec{A}.\vec{dA} = 0$ $\qquad$ $2\vec{A}.\vec{dA} = 0$

$\vec{A}.\vec{dA} = 0 \Rightarrow \vec{A} \perp \vec{dA}$



با در نظر گرفتن بردار $\vec{r}$ به صورت زیر داریم:

s : طول مسیر طی شده.

$$\vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} + z(s)\vec{K}$$

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\vec{i} + \frac{dy}{ds}\vec{j} + \frac{dz}{ds}\vec{K}$$

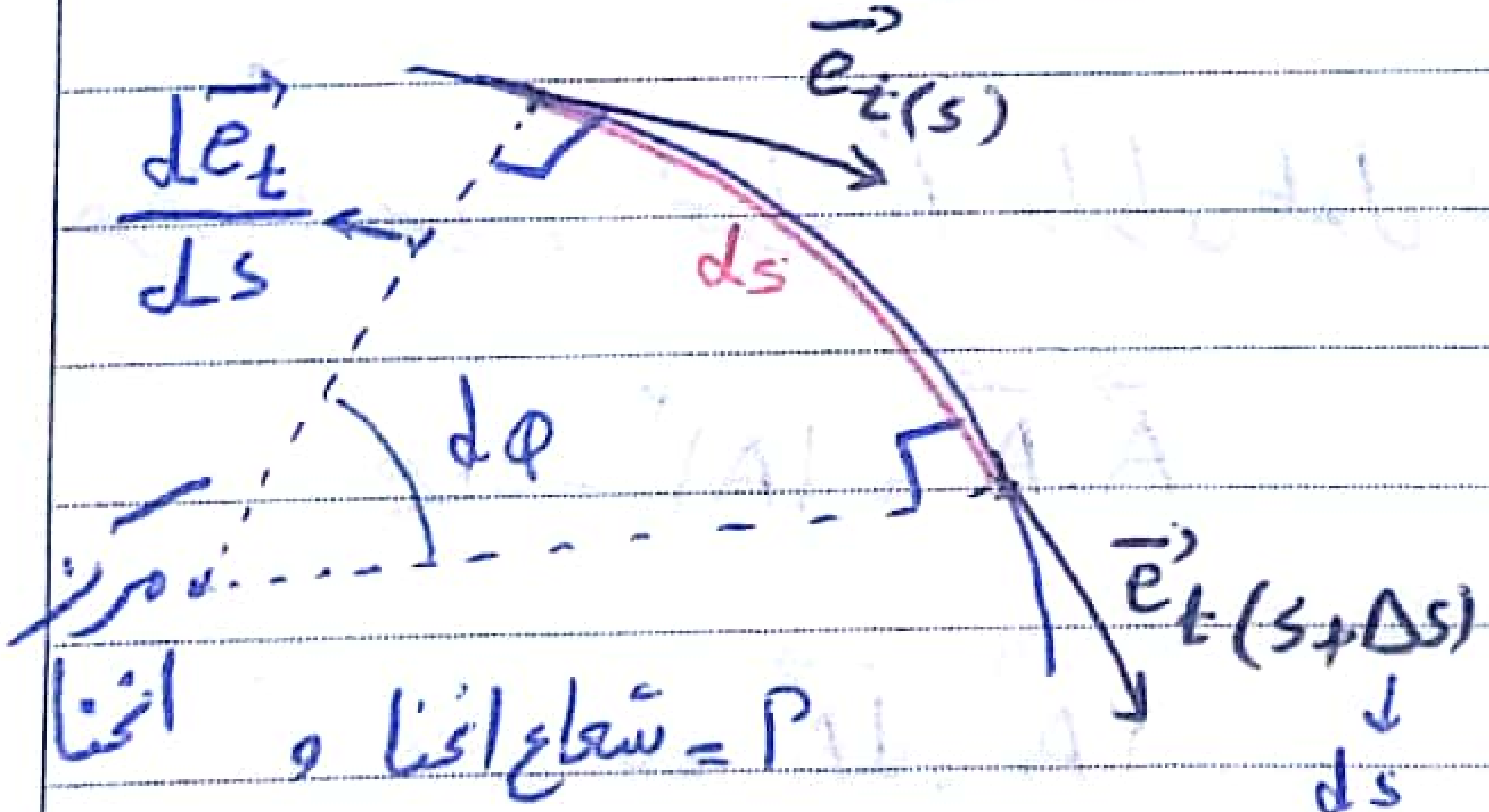
$$\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2}$$

$$\text{I} \quad \left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = \sqrt{\frac{ds^2}{ds^2}} = 1$$

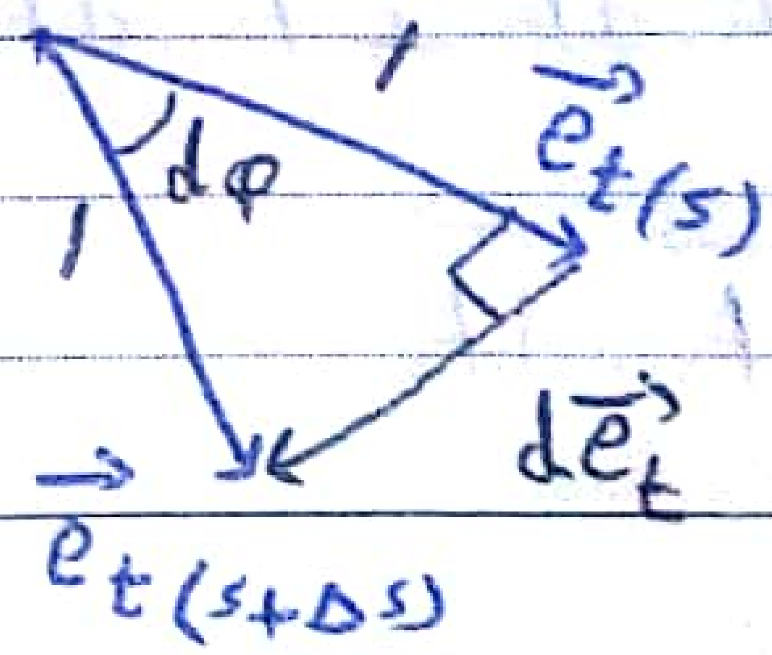
II بردار $\frac{d\vec{r}}{ds}$ بر مسیر حرکت مماس است.

$$\overset{\text{I, II}}{\Longrightarrow} \vec{e}_t = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

محاسبه $\frac{d\vec{e}_t}{ds} = ?$



ρ = شعاع انحنا و



محاسبه طول بردار:

$\tan d\varphi = \dfrac{|d\vec{e}_t|}{1}$

از طرفی: $\tan d\varphi \simeq d\varphi \quad \Rightarrow |d\vec{e}_t| = 1 \times \tan d\varphi$

$\Rightarrow \boxed{|d\vec{e}_t| = d\varphi}$

$\Rightarrow \left|\dfrac{d\vec{e}_t}{ds}\right| = \dfrac{d\varphi}{ds} = \dfrac{d\varphi}{\rho\, d\varphi} \quad \Rightarrow \boxed{\left|\dfrac{d\vec{e}_t}{ds}\right| = \dfrac{1}{\rho}}$

محاسبه امتداد: با توجه به این که طول بردار $\vec{e}_t$ ثابت است مشتق آن بر خودش عمود است.

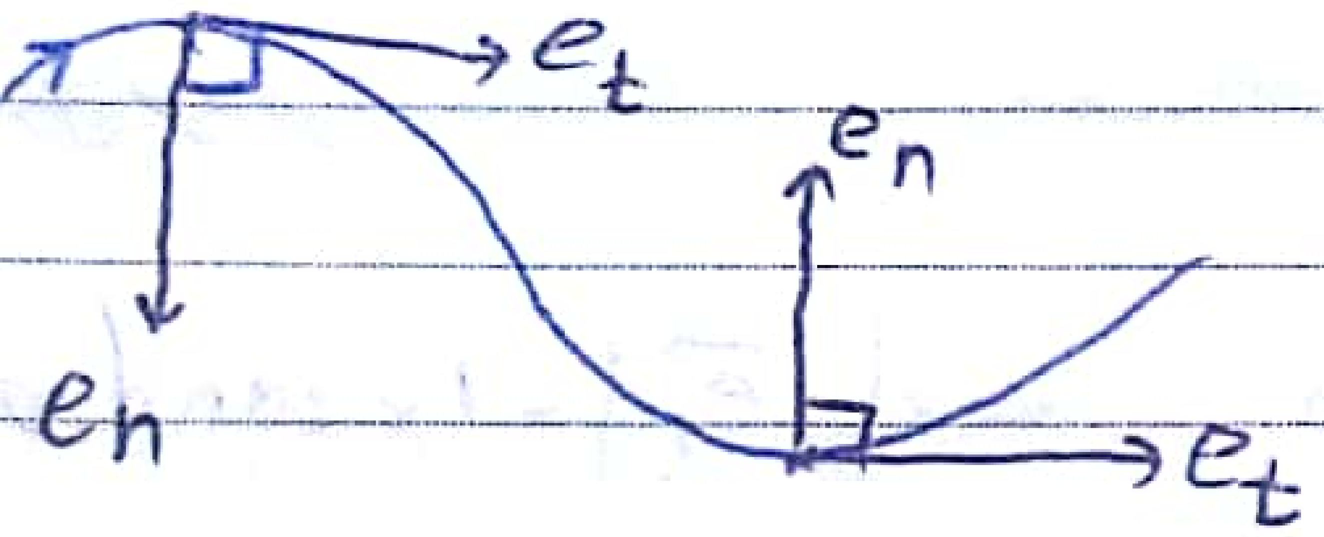
محاسبه جهت: قابل اثبات است که جهت بردار $\dfrac{d\vec{e}_t}{ds}$ به سمت تقعر و مرکز انحناء مسیر حرکت می باشد.

با در نظر گرفتن جهت بردار $\vec{e}_n$ خواهیم داشت: $\dfrac{d\vec{e}_t}{ds} = \dfrac{1}{\rho}\vec{e}_n$

$$\Rightarrow \vec{e}_n = \rho \frac{d\vec{e}_t}{ds}$$

دو رابطه مهم دستگاه فرنه: (حفظ شود)

1. $\vec{e}_t = \dfrac{d\vec{r}}{ds}$ 2. $\vec{e}_n = \rho \dfrac{d\vec{e}_t}{ds}$



مثال: متحرکی در دستگاه دکارتی مسیر زیر را طی می‌کند. مطلوب است محاسبه e_t و e_n.

$$\vec{r} = a\cos\varphi\,\vec{i} + a\sin\varphi\,\vec{j}$$

$$\vec{e}_t = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{d\varphi}\,\frac{d\varphi}{ds} \qquad \boxed{\vec{e}_t = (-a\sin\varphi\,\vec{i} + a\cos\varphi\,\vec{j})\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)}$$

$\downarrow$ ★

$$|\vec{e}_t| = \left(\sqrt{a^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi}\right)\frac{d\varphi}{ds}$$

$$\Rightarrow 1 = (a)\left(\frac{d\varphi}{ds}\right) \Rightarrow \left(\frac{d\varphi}{ds}\right) = \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{e}_t = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}}$$

$$\vec{e}_n = \rho\frac{d\vec{e}_t}{ds} = \rho\,\frac{d\vec{e}_t}{d\varphi}\,\frac{d\varphi}{ds}$$

$$\vec{e}_n = \rho(-\cos\varphi\,\vec{i} - \sin\varphi\,\vec{j})\left(\frac{1}{a}\right)$$

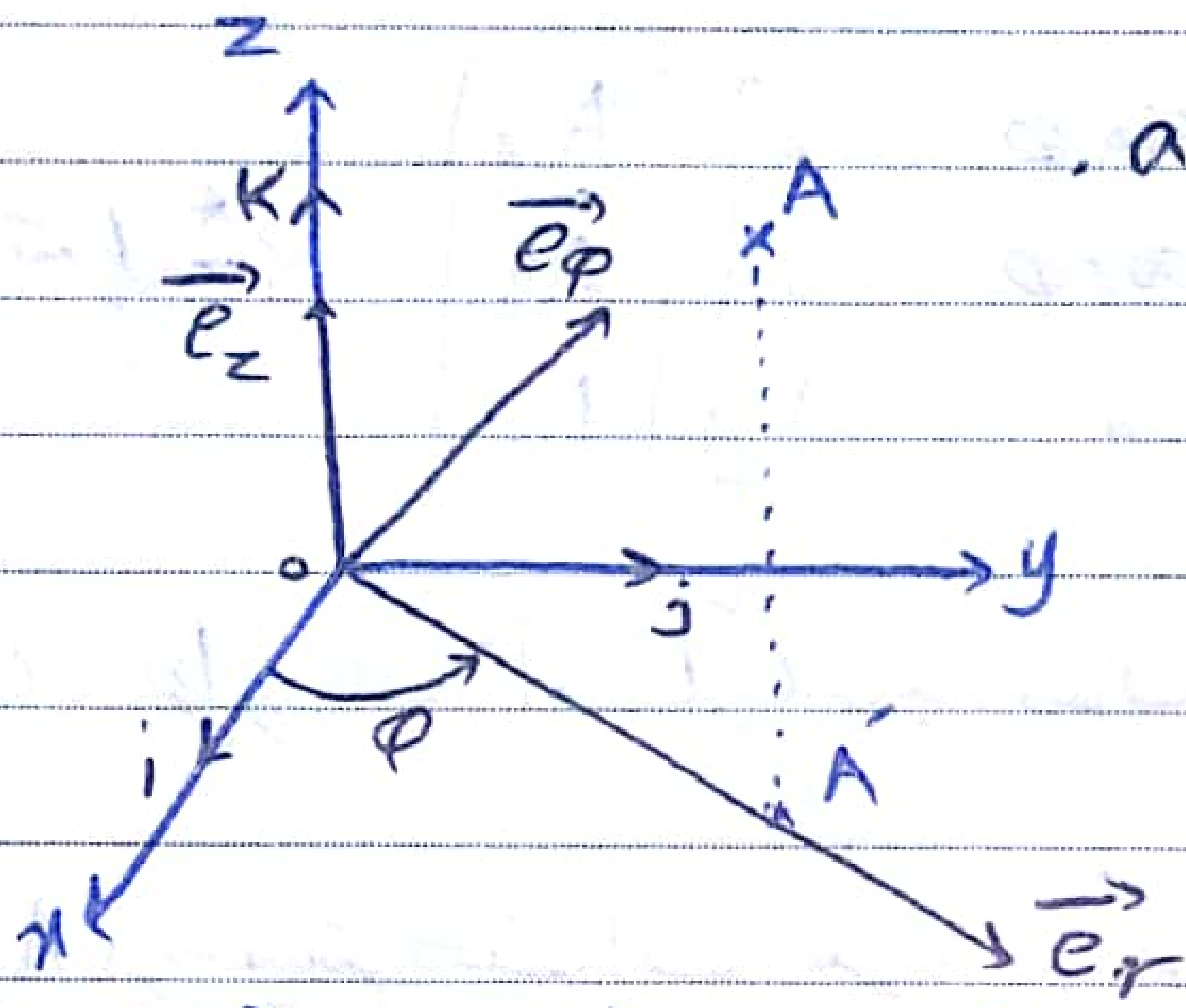
$$|\vec{e}_n| = (\rho)\sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\left(\frac{1}{a}\right)$$

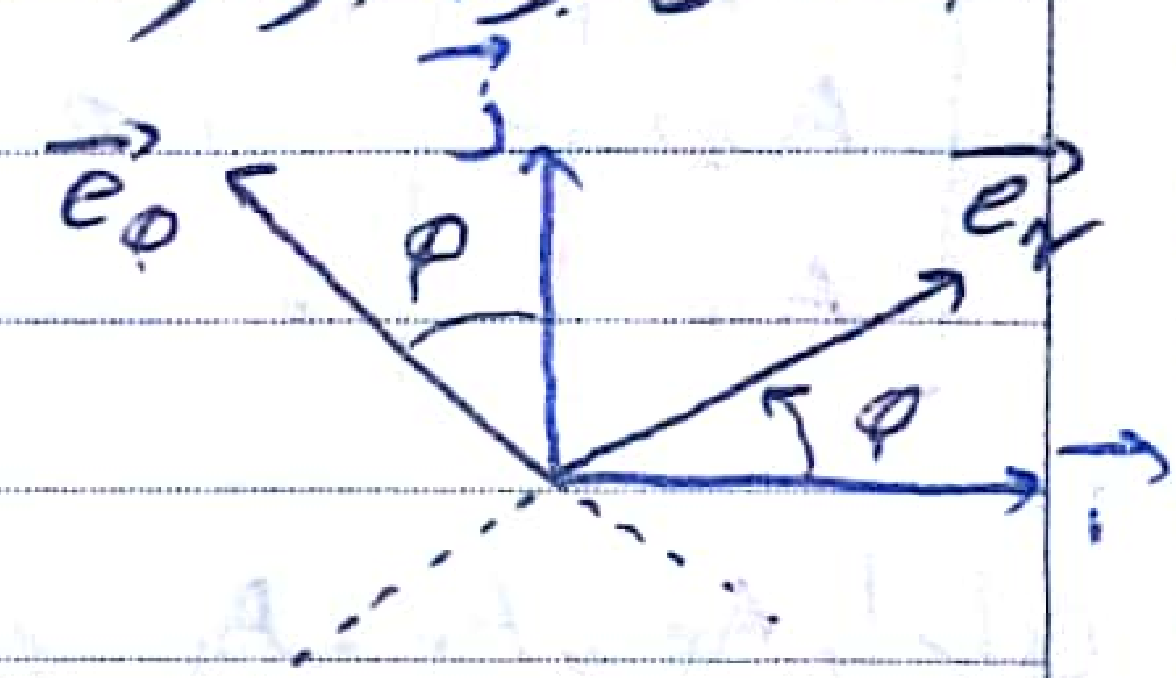
$$1 = (\rho)(1)\left(\frac{1}{a}\right) \Rightarrow \rho = a \Rightarrow \boxed{\vec{e}_n = -\cos\varphi\,\vec{i} - \sin\varphi\,\vec{j}}$$

$\downarrow$

$$ds = a\,d\varphi$$

مثال۱: مطلوب است رابطه تبدیل از دستگاه دکارتی به استوانه‌ای و بالعکس برای بردار دلخواه a.





$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$$

$$\vec{A} = A_r\vec{e}_r + A_\varphi\vec{e}_\varphi + A_z\vec{e}_z$$

$$\vec{i} = \cos\varphi\,\vec{e}_r - \sin\varphi\,\vec{e}_\varphi + 0\times\vec{e}_z$$

$$\vec{j} = \sin\varphi\,\vec{e}_r + \cos\varphi\,\vec{e}_\varphi + 0\times\vec{e}_z$$

$$\vec{k} = 0\times\vec{e}_r + 0\times\vec{e}_\varphi + 1\times\vec{e}_z$$

$$A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k} = A_r\vec{e}_r + A_\varphi\vec{e}_\varphi + A_z\vec{e}_z$$

$$A_x(\cos\varphi\,\vec{e}_r - \sin\varphi\,\vec{e}_\varphi + 0\times\vec{e}_z)$$

$$+A_y(\sin\varphi\,\vec{e}_r + \cos\varphi\,\vec{e}_\varphi + 0\times\vec{e}_z)$$

$$+A_z(0\times\vec{e}_r+0\times\vec{e}_\varphi+1\times\vec{e}_z)=A_r\vec{e}_r+A_\varphi\vec{e}_\varphi+A_z\vec{e}_z$$

$$\begin{bmatrix}A_r\\A_\varphi\\A_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\-\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{bmatrix}$$ ماتریس تبدیل *

مثال ۳: بردار $\vec{A}$ را در نظر بگیرید. مؤلفه‌های A_1، A_2 و A_3 را برای بردار A در سیستم مختصات غیرمتعامد که جهت محورهای وسیله‌ی $\vec{e}_1=\vec{i}$، $\vec{e}_2=\frac{\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{2}}$ و $\vec{e}_3=\frac{\vec{i}+\vec{k}}{\sqrt{2}}$ مشخص شده است، تعیین نمایید.

$$\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}$$

$$A_1\vec{e}_1+A_2\vec{e}_2+A_3\vec{e}_3\equiv A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}$$

$$A_1(\vec{i})+A_2\left(\frac{\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{2}}\right)+A_3\left(\frac{\vec{i}+\vec{k}}{\sqrt{2}}\right)=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}$$

$$\begin{bmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = A_x - A_y - A_z \\ A_2 = \sqrt{2}\, A_y \\ A_3 = \sqrt{2}\, A_z \end{cases}$$

مثال 4 : اگر بردار موقعیت در دستگاه دکارتی به صورت $\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ تعریف شود. مطلوب است بردار موقعیت در دستگاه استوانه ای. با توجه به مثال قبل ماتریس تبدیل *

$$\begin{bmatrix} R_r \\ R_\varphi \\ R_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} R_r \\ R_\varphi \\ R_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ z \end{bmatrix} \qquad \boxed{\vec{R} = r\vec{e_r} + z\vec{e_z}}$$

متحرک در دستگاه استوانه ای در صفحه r-z حرکت دارد و مولفه φ آن برابر با صفر است.

مثال 5 : مطلوب است رابطه تبدیل از دستگاه دکارتی به دستگاه کروی و

Year. Month. Date. ( ) Subject :

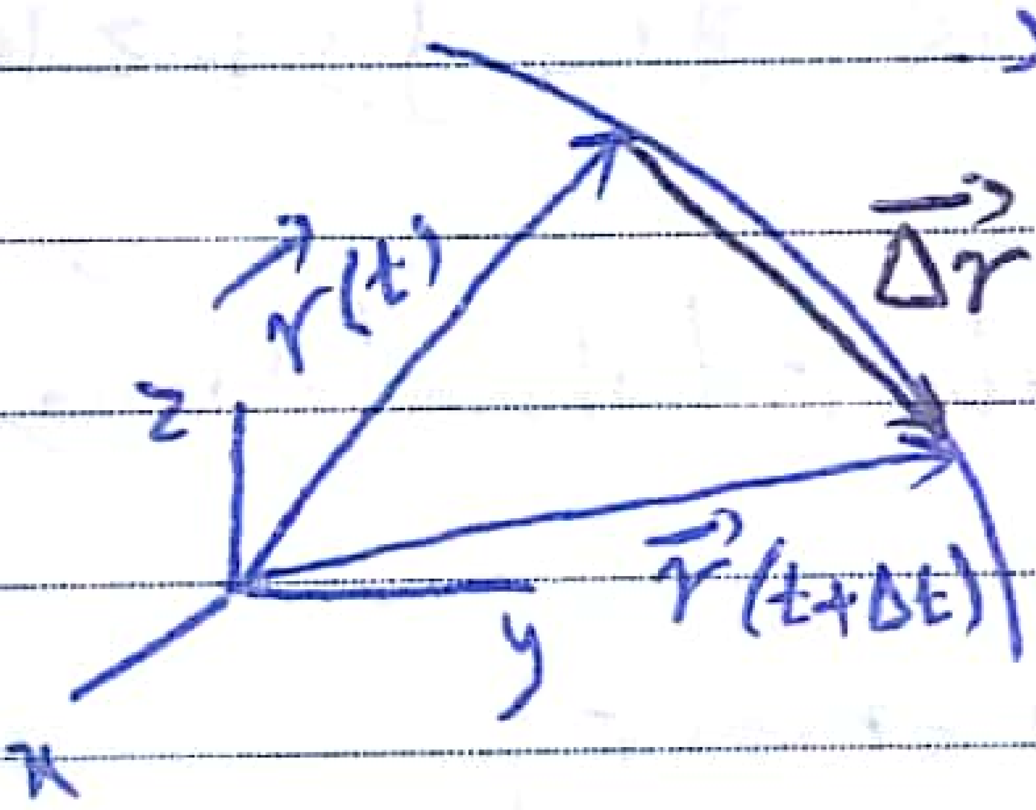
با استفاده از آن بردار موقعیت در دستگاه کروی را بنویسید.

$\vec{R} = r\vec{e}_r$ ← بردار موقعیت در دستگاه کروی

سینماتیک: بررسی حرکت در ۴ دستگاه دکارتی، قرینه، استوانه‌ای و کروی:

فرض: متحرکی در لحظه t دارای بردار موقعیت $\vec{r}(t)$ و در لحظه $(t+\Delta t)$

دارای بردار موقعیت $\vec{r}(t+\Delta t)$ می‌باشد.



تعریف: $\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{\vec{dr}}{dt} = \dot{\vec{r}}$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{\vec{dv}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

- بردارهای $\vec{v}$ و $\vec{a}$ به ترتیب بردارهای سرعت و شتاب لحظه‌ای می‌باشند.

- بردار سرعت همواره بر مسیر حرکت مماس است ولی بردار شتاب الزاماً مماس نمی‌باشد.

۱. دستگاه دکارتی

بردار موقعیت $\vec{R}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

بردار سرعت $\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$

$$= \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

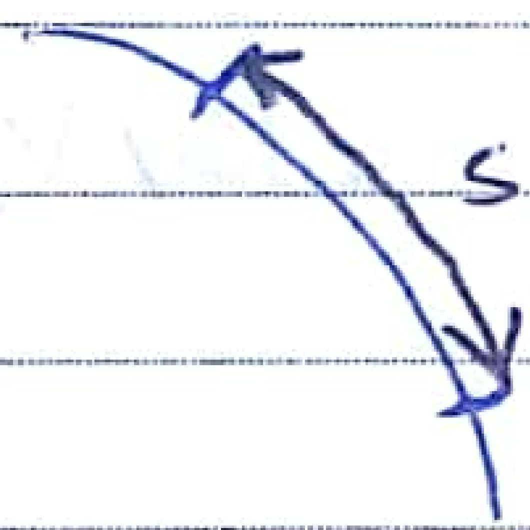
$|\vec{V}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \frac{ds}{dt}$ اندازه حرکت

یا تندی حرکت که یک مقدار اسکالر است

بردار شتاب $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$

$$= \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

2- دستگاه فرنه دستگاهی که مسیر حرکت مشخص باشد



بردار موقعیت $\vec{R} = \vec{R}(s)$

بردار سرعت $\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{ds}\frac{ds}{dt}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V} = \frac{ds}{dt}\vec{e_t}}$$

بردار شتاب $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\vec{e_t}\right)$

$$= \frac{d^2s}{dt^2}\vec{e_t} + \frac{d\vec{e_t}}{dt}\frac{ds}{dt}$$