روش جدایی متغیرها (ادامه)

در نتیجه میتوان ضرایب را به شکل زیر تعیین نمود:

$$(3),(4) \;\Rightarrow\; \int_0^1 \phi(x)\sin(m\pi\, x)\,dx = A_m \int_0^1 \sin^2(m\pi\, x)\,dx = \frac{A_m}{2}$$

$$A_n = 2\int_0^1 \phi(x)\sin(n\pi\, x)\,dx$$

بنابراین جواب نهایی به صورت زیر بیان میشود:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(2\int_0^1 \phi(\xi)\sin(n\pi\,\xi)\,d\xi\right)e^{-(n\pi\alpha)^2 t}\sin(n\pi\, x)$$

همانگونه که ملاحظه میشود با گذشت زمان طولانی دمای کل میله به سمت صفر میرود که این با توجه به شرایط مرزی مورد انتظار بود. همچنین با توجه به وجود ترم نمایی در رابطه بالا میتوان گفت که جملات اول میتوانند اثر بیشتری از جملات بعد داشته باشند و در مواردی در کاربردهای مهندسی میتوان به چند جمله اولیه اکتفا کرد.

شرایط مرزی غیرهمگن

اگر شرایط مرزی همگن نباشد باید در صورت امکان آنها را به نحوی به همگن تبدیل کنیم. اگر پس از این تغییر PDE هم همگن شد، میتوان آن را با روش جدایی متغیر حل کرد. در غیر اینصورت میتوان از سایر روشها مانند تبدیل انتگرالی استفاده کرد. مساله مقابل را در نظر بگیرید:

$$
\begin{aligned}
&u_t = \alpha^2 u_{xx} && 0 < x < L, 0 < t < \infty \\
&u(0,t) = k_1 && 0 < t < \infty \\
&u(L,t) = k_2 && \\
&u(x,0) = \phi(x) && 0 \le x \le L
\end{aligned}
$$

میدانیم که جواب این مساله در بینهایت به شکل یک توزیع خطی بین k_1 و k_2 خواهد شد. بنابراین جواب u را به صورت مجموع یک جواب پایدار و یک جواب گذرا در نظر میگیریم:

$$
u(x,t) = \text{steady state} + \text{transient} = \left[\mathrm{k}_1 + \frac{x}{L}(\mathrm{k}_2 - \mathrm{k}_1) \right] + U(x,t)
$$

شرایط مرزی غیرهمگن

با اعمال این تغییر و جاگذاری در معادله اصلی، PDE جدید به صورت زیر به دست می آید که دارای شرایط مرزی همگن است:

$$U_t = \alpha^2 U_{xx} \qquad 0 < x < L, 0 < t < \infty$$

$$U(0,t) = 0 \qquad 0 < t < \infty$$

$$U(L,t) = 0$$

$$U(x,0) = \phi(x) - [\mathrm{k}_1 + \frac{x}{L}(\mathrm{k}_2 - \mathrm{k}_1)] = \bar{\phi}(x) \qquad 0 \le x \le L$$

که جواب آن به شکل زیر خواهد بود: (چرا؟)

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(2\int_0^1 \bar{\phi}(\xi)\sin\left(n\pi \xi/L\right)d\xi\right)e^{-(n\pi\alpha)^2 t}\sin\left(n\pi x/L\right)$$

به طور کلی شرایط مقابل با تبدیل زیر به همگن تبدیل میشود:

$$u(0,t) = g_1(t)$$

$$u(L,t) = g_2(t)$$

$$u(x,t) = [g_1(t) + \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{L}}(g_2(t) - g_1(t))] + U(x,t)$$