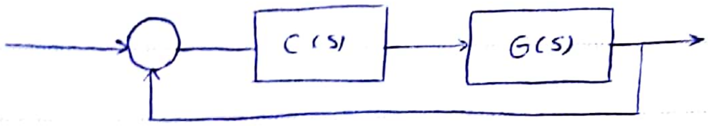
Subject
Date

* جلسه



- پایداری
- رفتار مطلوب در حالت ماندگار
- رفتار مطلوب در حالت گذرا

سیستم LTI ، $G(s)$ پایدار است اگر و تنها اگر تمام قطب های آن در LHP باشند.

اگر تمامی ریشه های چندجمله‌ای $d(s)$ سمت چپ محور $j\omega$ قرار گیرند به آن چندجمله‌ای هرویتز (Herwitz) می‌گوییم.
(تسامحاً ☹ چندجمله‌ای پایدار نیز گفته می‌شود).

شروط لازم و کافی برای هرویتز بودن :

مرتبه اول : $s + a$ $\quad a > 0$

مرتبه دوم : $s^2 + as + b$ $\quad a > 0 \quad b > 0$

تمام ضرایب مثبت یا هم علامت باشند.

مرتبه‌ی بالاتر : $a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$

دقت کنید هر چندجمله‌ای را می‌توان به تعدادی چندجمله‌ای مرتبه اول و دوم با ضرایب حقیقی تجزیه کرد.

$$d(s) = (s+\alpha_1)(s+\alpha_2)\dots(s^2+\beta_1 s+\gamma_1)(s^2+\beta_2 s+\gamma_2)\dots$$

شرط لازم برای هرویتز بودن چندجمله‌ای $d(s)$ این است که همه‌ی ضرایب هم علامت یا مثبت باشند.

$$(s+1)^3 + 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_1 = -3.15 \\ s_{2,3} = 0.09 \pm 1.9j \end{cases} \Longrightarrow$$ این شرط کافی نیست.

پس در یک چندجمله‌ای اگر برخی از ضرایب منفی یا صفر بودند این چندجمله‌ای حتماً هرویتز نیست!

$$\left.\begin{array}{l} s^2+1 \\ s^3+3s^2-4s+1 \\ s^4+2s^2+5s+6 \end{array}\right\}$$ هرویتز نیستند.

اگر شرط فوق برقرار بود، برای بررسی پایداری از روشی به نام جدول Rooth - Herwitz استفاده می‌کنیم.

$$d(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

$$\begin{array}{c|cccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\
s^{n-2} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} & \dots \\
s^{n-3} & c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} & \dots \\
\vdots & & & &
\end{array}$$

$$b_{n-1} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \quad , \quad b_{n-3} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}$$

$$c_{n-1} = \frac{-1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{vmatrix}$$

- هرچه در این جدول پائین‌تر می‌رویم عناصر کمتر می‌شوند تا نهایتاً فقط یک عنصر باقی می‌ماند.
- شرط لازم و کافی برای این که چندجمله‌ای $d(s)$ هرویتز باشد این است که تمامی عناصر ستون اول جدول هم علامت باشند.
- اگر چندجمله‌ای هرویتز نباشد تعداد ریشه‌های RHP آن برابر با تعداد تغییر علامت در ستون اول است.

مثال) $d(s) = s^3 + 2s^2 + 3s + 1$

ضرایب مثبت است. لازم است ولی کافی نیست

$$\begin{array}{c|cc}
s^3 & 1 & 3 \\
s^2 & 2 & 1 \\
s^1 & -\frac{1}{2}(1\times 1 - 2\times 3) = 2.5 & 0 \\
s^0 & -\frac{1}{2.5}(2\times 0 - 1\times 2.5) = 1 &
\end{array}$$

اعداد ستون اول همگی مثبت هستند پس چندجمله‌ای $d(s)$ هرویتز است.

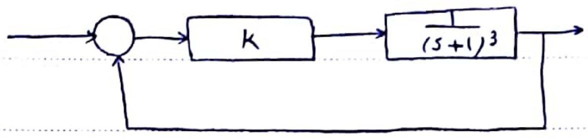
مثال) $d(s) = (1+s)^3 + 10 = s^3 + 3s^2 + 3s + 11$

$$\begin{array}{c|cc}
s^3 & 1 & 3 \\
s^2 & 3 & 11 \\
s^1 & -\frac{1}{3}(1\times 11 - 3\times 3) = -\frac{2}{3} & 0 \\
s^0 & +\frac{1}{2/3}\left(0 + \frac{11\times 2}{3}\right) = 11 &
\end{array}$$

در ستون اول دو تغییر علامت دیده می‌شود پس این چندجمله‌ای هرویتز نیست و دو ریشه سمت راست محور $j\omega$ دارد.

Proportional _ Control

کنترل کننده ی تناسبی



تابع تبدیل حلقه بسته : $\dfrac{k}{(s+1)^3 + k} = \dfrac{k}{s^3 + 3s^2 + 3s + k + 1}$

$$\left.\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 3 \\ s^2 & 3 & k+1 \\ s^1 & -\frac{1}{3}(k+1-9) = \frac{8-k}{3} & 0 \\ s^0 & \frac{3}{\cancel{k-8}}\left((k+1)\frac{\cancel{(k-8)}}{3}\right) = k+1 & \end{array}\right\}$$

شرط پایداری سیستم حلقه بسته :

$$\frac{8-k}{3} > 0 \Rightarrow \boxed{k < 8}$$

$$k+1 > 0 \Rightarrow \boxed{k > -1}$$

محدوده ی قابل قبول برای پایداری سیستم حلقه بسته : $-1 < k < 8$

مثال) $d(s) = s^2 + as + b$

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & b \\ s^1 & a & 0 \\ s^0 & -\frac{1}{a}(-ab) = b & \end{array}$$

$a, b > 0$ شرط لازم و کافی برای هرویتز بودن.

• حالت های خاص :

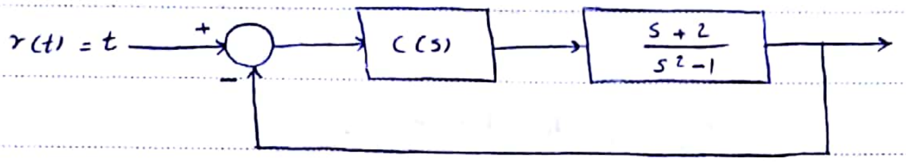
یک عدد در ستون اول صفر شود یا یک سطر کاملاً صفر شود را از کتاب (فصل 6) مطالعه کنید.

مثال) تابع تبدیل یک سیستم بصورت $\dfrac{s+2}{s^2-1}$ است . برای این سیستم کنترل کننده ای طراحی کنید که خطای ماندگار حلقه بسته در پاسخ به ورودی پله حداکثر برابر 10% باشد.

Subject

Date

$R(s) = \frac{1}{s^2}$



• کنترل کننده های متداول در صنعت

1) $C(s) = k$ proportional کنترل کننده‌ی تناسبی P

2) $C(s) = \frac{k}{s}$ Integral controller کنترل کننده‌ی انتگرالی I

3) $C(s) = K_p + K_I/s$ proportional - Integral controller

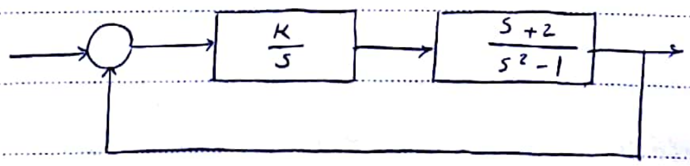
کنترل کننده‌ی تناسبی - انتگرالی P.I

برای برآورده شدن مشخصات پاسخ ماندگار، تابع تبدیل حلقه باز حداقل باید یک انتگرال‌گیر داشته باشد.

پس به عنوان اولین انتخاب $C(s) = \frac{K}{s}$ را در نظر می‌گیریم.

حال پایداری سیستم حلقه بسته با این کنترل کننده را بررسی می‌کنیم.

انتخاب اول :



حلقه بسته :
$$\frac{K(s+2)}{s(s^2-1)+K(s+2)} = \frac{K(s+2)}{s^3+(K-1)s+2K}$$