

Subject :

Year :

Month :

Date :

دکتر عبیدی

کاربرد ریاضیات

مدل سازی عبارت است از بیان ریاضی فیزیکی و شیمیایی تغییرات و تحولات انجام یافته در یک یا چند سیستم مرتبط با یک دیگر.

مدل سازی ریاضی شامل سه مرحله اساسی فرض بندی مسئله، حل معادله های حاصل و تحلیل نتایج است.

★ روش های مدل سازی : ۱- مدل سازی تجربی ۲- مدل سازی نظری

• مدل سازی تجربی انجام آزمایش های متعدد

رسم متغیرها

به دست آوردن رابطه میان متغیرها

تعیین پارامترهای مدل

استفاده از قانون های اساسی و قانون های ویژه

• مدل سازی نظری

فرض بندی مسئله

یافتن معادله های حاکم بر متغیرهای سیستم

حل معادله ها



قانون بقای انرژی ← قانون دوم  
 قانون سوم ← قانون سوم  
 قانون اول ← قانون اول

تجزیه و تحلیل سیستم - نرخ تولید - نرخ مصرف - نرخ ورودی - نرخ خروجی

۸- تعیین شرایط اولیه و شرایط مرزی

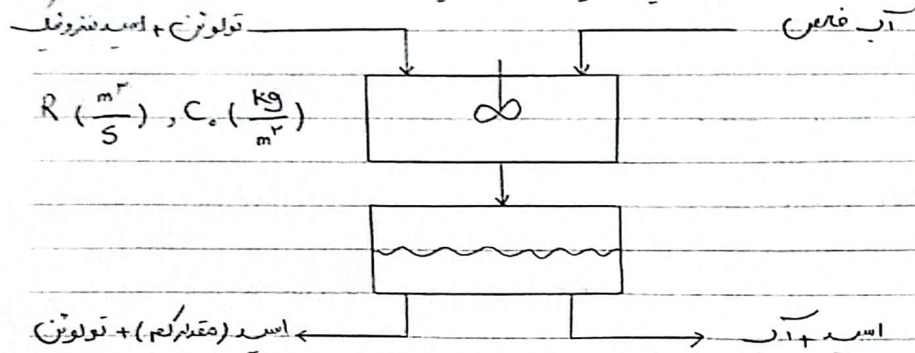
۹- انتخاب روش های حل مناسب

۱۰- تجزیه و تحلیل نتایج

مثال: در فرایند استخراج مایع - جابجایی - بنزدیک اسید از تولوئن توسط حلال آب در یک

فرایند یک مرحله ای جداسازی شود. طرح شماتیک این فرایند در شکل زیر نمایش داده شده

است. مقدار اسید خروجی در این فرایند را محاسبه کنید.



هدف جداسازی تولوئن از اسید است و نشان داده شده است.

★ مراحل مختلف مدل سازی :

۱- شناخت دقیق تغییرات مسئله و تمایز و اولیه شرایطی عالم بردن

۲- ترسیم دیاگرام ساده از فرایند

۳- تعیین متغیرهای مستقل و وابسته

متغیرهای مستقل  $(m, y, z, t)$  پارامترین

استوادی  $(t, \theta, z, t)$

کروی  $(r, \theta, \phi, t)$

متغیر وابسته  $P, C, T, \dots$

۴- تعیین مشخصات فیزیکی و شیمیایی سیستم  $(\rho, k, C_p, \mu, \dots)$

۵- فرضیات لازم جهت ساده سازی

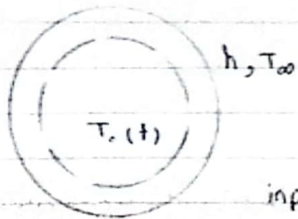
۶- انتخاب سیستم  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Lumped (نوده ای)} \rightarrow \text{تغییرات فقط با زمان} \\ \text{Differential (دیفراشیلی)} \rightarrow \text{تغییرات با زمان و مکان} \end{array} \right.$

۷- انتخاب قوانین بقا :

قانون بقای جرم و انرژی  $\left\{ \begin{array}{l} \text{و سلوزیته نیوتن} \rightarrow \tau = \mu \frac{du}{dy} \\ \text{قانون فیک} \rightarrow J = -D_{AB} \frac{dC_A}{dz} \end{array} \right.$



نکته: اگر دمای ورودی به شمع  $T_0$  از دمای محیط  $T_\infty$  کمتر باشد، شمع سرد می شود. توزیع دما را در این کوره می یابیم.



شمع سرد می شود. توزیع دما را در این کوره می یابیم.

$$\Delta E = \Delta Q - \Delta W$$

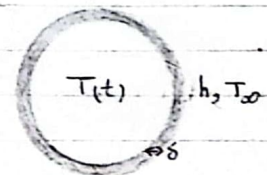
مولفه انرژی قانون عمومی:

$$\text{input} - \text{output} + \text{gen} - \text{cons} = \text{acc}$$

$$-\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) \rho C_p \frac{dT_c(t)}{dt} = h A (T_\infty - T_c(t))$$

$$\frac{R \rho C_p}{3h} \frac{dT_c(t)}{dt} + T_c(t) = T_\infty$$

۲- سطح جانبی دیسک دایره ای به ضخامت ناچیز  $\delta$  در دمای  $T_\infty$  قرار دارد. ضریب انتقال حرارت متوسل برای دیسک و دمای اطراف آن  $T_c(t)$  قرار گرفته.



$h$  است. معادله ای برای توزیع دمای دیسک به دست می آید.

$$\dot{m}_{in} - \dot{m}_{out} + \dot{q}_{gen} - \dot{q}_{cons} = \text{acc}$$

$$\sum \dot{q}_{in} - \sum \dot{q}_{out} + \dot{Q} = \frac{dE}{dt}$$

انرژی

$$q = kA \frac{dT}{dt}$$

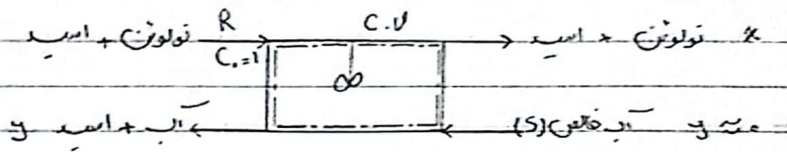
اگر نفوذ گرایی باشد \*

$$q = hA(T_c(t) - T_\infty)$$

اگر نفوذ گرایی نباشد



اگر دمای محیط  $T_\infty$  از دمای ورودی  $T_0$  کمتر باشد، شمع سرد می شود.



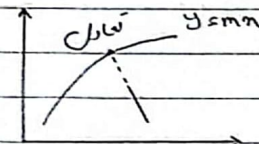
۱- غلظت اسید در جریان خروجی حاصل (Extract)

۲- غلظت اسید در جریان خروجی تولوئن (Raffinate)

$$\left. \begin{matrix} C_c \\ R \\ S \end{matrix} \right\} \text{متغیر مستقل}$$

فرضیات ساده شده: ۱- نفوذ گرایی ناچیز است. ۲- از دمای محیط  $T_\infty$  کمتر است. ۳- غلظت

اگر دمای محیط  $T_\infty$  از دمای ورودی  $T_0$  کمتر باشد، شمع سرد می شود.



\* اگر دمای محیط  $T_\infty$  از دمای ورودی  $T_0$  کمتر باشد، شمع سرد می شود.

input و output

$$(R C_c + S y^T) - (S y + R n) = R - S(mn) - R n$$

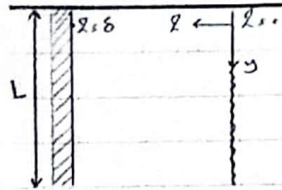
$$R = (R + mS)n$$

$$n = \frac{R}{R + mS} \quad y = \frac{mR}{R + mS}$$

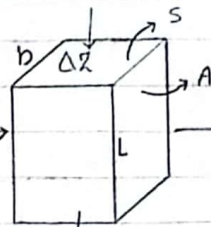


Subject :

Year : Month : Date :



موضوع ورودی از طریق انتقال مولی



موضوع خروجی از طریق انتقال مولی

موضوع خروجی از طریق جابه جایی

$$\sum \dot{F}_{in} - \sum \dot{F}_{out} = \frac{d(mu)}{dt}$$

$$\rightarrow \tau = -\mu \frac{u}{\Delta z}, \tau = -\mu \frac{du}{dz}, \tau = -\mu \frac{du}{dz}$$

$$\frac{A}{L \times b} \frac{d\tau}{dt} + \rho g u = 0$$

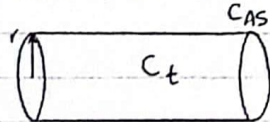
$$\frac{1}{\Delta z} \frac{d\tau}{dt} + \rho g = 0 \Rightarrow \frac{1}{\Delta z} \frac{d(-\mu \frac{u}{\Delta z})}{dt} + \rho g = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\mu}{\Delta z^2} \frac{du}{dt} + \rho g = 0$$

۵- جسم متخلخل استوانه ای شکل به شعاع ۲ در نظر بگیرید. ابتدا غلظت ماده ی

A در آن برابر ۵ باشد. اگر این جسم ناگهان در محلولی با غلظت CAS قرار گیرد،

ماده ای بیاید که با آن بتوان تغییرات غلظت A در داخل جسم را به دست آورد.



$$\dot{m}_{in} - \dot{m}_{out} + \dot{m}_{gen} - \dot{m}_{des} = acc$$

Subject :

Year : Month : Date :

$$\Rightarrow -hS(T_t - T_\infty) = -KA \frac{dT}{dt}, A = 2\pi r b, S = \pi r^2$$

$$\Rightarrow \frac{2K}{hr} \frac{dT(t)}{dt} = T(t) - T_\infty$$

۳- داده های پایراسیون یک دستگاه اندازنده کتری شدت جوشی جریان به صورت زیر

است. رابطه ای برای تغییرات R به دست آورید.

شماره جوشی

U (lit/min) (R) غلظت ماده در دستگاه خوانده می شود

|         |    |                                                               |
|---------|----|---------------------------------------------------------------|
| ۲۰، ۱۰  | ۱۰ | $U = aR + b$<br>$U_1 = 20, R_1 = 10$<br>$U_2 = 14,4, R_2 = 5$ |
| ۵۲، ۱   | ۳۰ |                                                               |
| ۸۴، ۴   | ۵۰ |                                                               |
| ۱۱۸، ۳  | ۷۰ |                                                               |
| ۱۵۱، ۱۰ | ۹۰ |                                                               |

$$a = \frac{14,4 - 20}{50 - 10} = -1,415 \Rightarrow 20 = -1,415 \times 10 + b \Rightarrow b = 3,85$$

$$U = 1,415 R + 3,85$$

۴- جریان سیال را در نظر بگیرید که به شکل فیلم ویزان لایه ای به پایین به شکل

شعاعی در حال حرکت است. داده تغییرات سرعت و غلظت را به دست آورید.

Amia

Amia



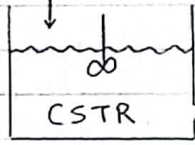
Subject :

Year : Month : Date :

$$C_i = 2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$R_i = 0.2 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$V_i = 2 \text{ m}^3$$



$$R_o = 0.1 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$V = 2 \text{ m}^3 \Rightarrow n, q$$

با فرض مستقل  $t$

با فرض وابسته  $n$  و  $q$

فرضیات ۱. سیستم ناپایدار ۲. افت دما ناچهار است ۳. چگالی جریان ورودی با چگالی جریان

فردی برابر است  $P_i \approx P_o$

system, lumped

قانون بقای جرم: موازنه طی

موازنه جزئی برای غل

| $t$                  | $t + \Delta t$                                             |                                                                |
|----------------------|------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| $V$                  | $V + \frac{dV}{dt} \Delta t$                               | $\rho$ : غلظت غل جریان                                         |
| $n$ غلظت فردی        | $n + (dn/dt) \Delta t$                                     |                                                                |
| $C_i = 2$ غلظت ورودی | $2$                                                        | $C$ : غلظت غل در جریان                                         |
| $R_i = 0.2$          | $0.2$                                                      |                                                                |
| $R_o = 0.1$          | $0.1$                                                      |                                                                |
| $Vn$                 | $(V + \frac{dV}{dt} \Delta t)(n + \frac{dn}{dt} \Delta t)$ | $[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times \text{m}^3 = \text{kg}]$ |



input - output = acc

موازنه طی

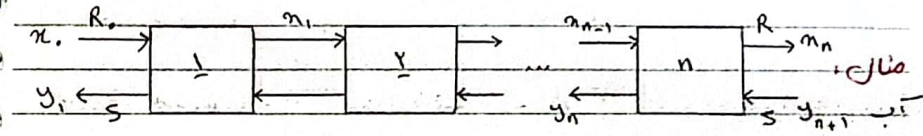
Subject :

Year : Month : Date :

$$J_A \cdot A \cdot \frac{\partial C_t}{\partial t} V \Rightarrow D_{AB} \frac{C_A - C_{AS}}{r} \pi r^2 L = \frac{\partial C}{\partial t} \pi r^2 L$$

$$\Rightarrow \frac{\partial C}{\partial t} = D_{AB} \frac{C_A - C_{AS}}{rL} \Rightarrow \frac{rL}{D_{AB}} \frac{dC_t}{dt} = C_{At} - C_{AS}$$

$$J_A = D_{AB} \frac{dC_A}{dr} = -D_{AB} \frac{C_A - C_{AS}}{r}$$



input - output + product = acc نوع سیستم: ذخیره‌ای

$$(Rn_{n-1} + Sy_{n+1}) - (Rn_n + Sy_n) = 0$$

$$\begin{cases} y_n = m n_n \\ y_{n+1} = m n_{n+1} \end{cases}$$

مثال: یک مخزن حاوی ۲ م<sup>۳</sup> آب موجود است. جریان آب غل با غلظت ۲  $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

ورق ۱.۲  $\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$  به داخل مخزن جریان می‌یابد. جریان فردی لرغون برابر است با

۱.۲  $\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$  آب چنانچه اختلاف در غلظت به خوبی صورت گیرد غلظت غل در غلظت را چنانچه

که حجم آن به ۲ م<sup>۳</sup> می‌رسد بدست آورند.

