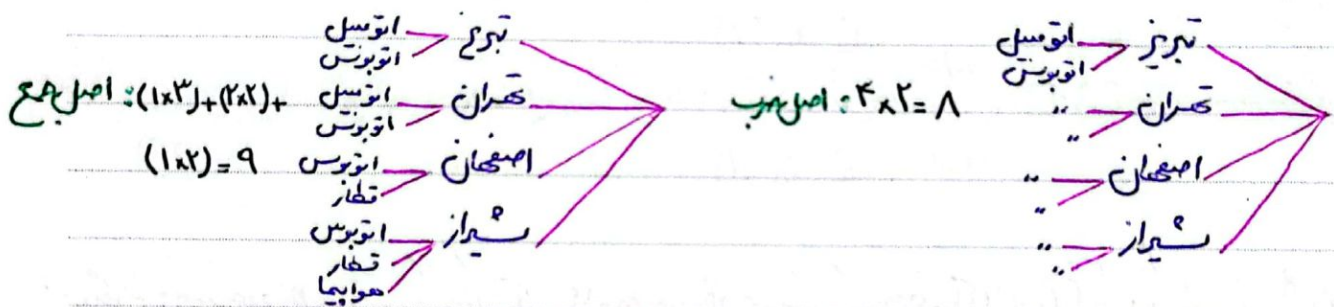


فصل اول: آنالیز ترکیبی

اصل ضرب: اگر آزمایشی به n_1 طریق انجام شود و برای هر n_1 آزمایشی اول، آزمایشی دوم n_2 طریق انجام شود، در این صورت کل حالات ممکن برابر است با $n_1 \times n_2$

اصل جمع: اگر آزمایشی به n_1 و n_2 حالت انجام بیفتد و برای هر n_1 آزمایشی m_1 و برای هر n_2 آزمایشی m_2 آزمایشی رخ دهد، کل حالات ممکن برابر است با $n_1 m_1 + n_2 m_2$

اصول اساسی شمارش



نکته: در اصل جمع، شما باید نوع و تعداد بسط باشد. مثلاً در دو شهر تبریز و کهران دو حالت میسر وجود دارد.

مثال: یک جامعه کوچک شامل خانم و وجود دارد که هر کدام ۳ فرزند دارند. اگر بخواهم یکی از زنان آن یکی از فرزندان را به عنوان مادر و فرزند نمونه سال انتخاب کنم. چند حالت وجود دارد؟

* چون همه حالات میسر است و تفاوتی بین آنها وجود ندارد از اصل جمع استفاده می‌کنیم. $10 \times 3 = 30$ ✓

مثال: ۱ تن از مادران دارای دو فرزند و ۴ تن از مادران دارای ۳ فرزند هستند. برای انتخاب مادر و فرزند نمونه سال چند حالت وجود دارد؟

* چون تفاوت بین مادران وجود دارد و حالتی نیز میسر هستند از اصل جمع استفاده می‌کنیم. $(7 \times 2) + (4 \times 3) = 24$ ✓

مثال: چند عدد ۱ رقمی بین صد هزار تا یک میلیون وجود دارد. به صورت علامت متوالی میسر نشانند؟

* در این نمونه ما ۱ خانه را از جلویی که محدودیت داریم بررسی می‌کنیم. $1,000,000 - 100,000 = 900,000$

$99999 = 9^5$ ✓

مثال: ۲ اعداد ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ چند عدد سه رقمی زوج بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت؟

$$\begin{array}{l} \text{بازگشت} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & 4 & 1 \\ \hline \end{array} \\ + \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 4 & 2 \\ \hline \end{array} \\ \text{بدون بازگشت} \end{array} \Rightarrow (5 \times 4 \times 1) + (4 \times 4 \times 2) = 20 + 32 = 52 \checkmark$$

مثال: ۱۰ اعداد ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ چند عدد سه رقمی زوج بزرگتر از ۴۱۰ بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

$$\begin{array}{l} \text{بزرگترین عدد سه رقمی زوج} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 8 & 6 \\ \hline \end{array} \\ + \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \\ + \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 6 & 8 \\ \hline \end{array} \\ \text{بدون بازگشت} \end{array} \Rightarrow (4 \times 8 \times 6) + (1 \times 1 \times 2) + (1 \times 6 \times 8) = 272 \checkmark$$

مثال: چند عدد چهار رقمی زوج بزرگتر از ۵۰۱۳ می‌توان نوشت؟ هیچ رقمی از ارقام آن تکرار نمی‌شود؟

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & 9 & 8 & 7 \\ \hline \end{array} + 1 = 207 \checkmark$$

اعداد زوج بزرگتر از ۵۰۱۳

جایگشت (ترتیب): ۱. جایگشت n عنصری متمایز ۲. جایگشت r عنصری از n عنصری متمایز ۳. جایگشت n عنصری متمایز در مرتبه ۴. جایگشت n عنصری به برخی از آنها ارزش یکسان دارند

- نکته: در جایگشت یا ترتیب عنوان مهم می‌باشد.
۱. صورت اصلی ضرب، n عنصر متمایز را در یک مرتبه مرتب نمود: جایگشت برای است با $n!$
 ۲. n عنصر متمایز به r تایی آنها را مرتب نمود: جایگشت برای است با $P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$
 ۳. در اینجا فقط نحوه قرار گرفتن افراد به هم مهم است نه جایگاه آنها: جایگشت برابر است با $(n-1)!$
 ۴. اگر عناصر ارزش یکسان داشته باشند، جایگشت کل را به جایگشت عناصری که ارزش یکسان دارند تقسیم می‌کنیم.

مثال: در یک مسابقه اتومبیل رانی که شرکت کننده دارد، به چند صورت می‌توان رتبه نهمی را نام برد؟

$$10! \checkmark$$

سوال: به چند طریق می توان ۵ دختر که در یک کلاس درس در یک ردیف و به صورتی:

(الف) دختر که در یک ردیف بایستد؟

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

(ب) دختر که در یک ردیف بایستد؟

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

(ج) دختر که در یک ردیف بایستد؟

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

سوال: در یک مایه اتومبیل راننده به اشتباه گفته دارد به چند طریق می توان رتبه ای ۱ تا ۱۰ را
 نسبت کرد؟

$$P_r^n = P_{10}^1 = \frac{10!}{9!} = \frac{10 \times 9!}{9!} = 10$$

سوال: اگر قرار باشد ۵ نفر در یک میز باشند تعداد آرایه های A، B و C باشد چقدر است؟ (n > 4)

$$(n-3)! \times 2! = 2! = 2$$

سوال: اگر قرار باشد ۵ نفر در یک میز باشند، تعداد آرایه های A، B و C باشد چقدر است؟ (n > 5)

$$A \ B \ C \ D \rightarrow (n-4)! \times 2! = 2! = 2$$

سوال: با حروف a, a, a, c چند کلمه می توان ساخت؟

$$\frac{4!}{3!1!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = 4$$

سوال: با حروف a, a, b, b, c, c چند کلمه می توان ساخت؟

$$\frac{6!}{2!2!2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 \times 1} = 15$$

سوال: با حروف a, a, b, b, c, c, c چند کلمه می توان ساخت؟

$$\frac{7!}{2!2!3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 2 \times 3 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1} = 35$$

ترکیب: n عنصر می داریم به برون ترتیب r نفر از n عنصر انتخاب می کنیم و رابطه آن به صورت

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

نیز است:
 نکته: در ترکیب عنوان عنده هم

سوال: به چند طریق می توان ۳ نفر از ۱۰ نفر را انتخاب نمود؟

$$C_3^{10} = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{3 \times 2 \times 1 \times 7!} = 120$$

ایران ترانسفو به اصالت ایران

(الف) به چند طریق می توان یک گروه به مقوله ساخت ؟

$$C_3^{12} = \frac{12!}{3!9!} = \frac{12 \times 11 \times 10}{9 \times 8 \times 7} = 220$$
$$\binom{V}{r} \binom{A}{r} = \frac{V!}{r! (V-r)!} \times \frac{A!}{r! (A-r)!} = \frac{V \times \cancel{A} \times \cancel{A!}}{\cancel{A!} \times \cancel{A} \times \cancel{A-r}} \times \frac{A-r}{A-r} = \frac{V! \times 1}{(V-r)!} = \frac{V!}{(V-r)!} \checkmark$$

مثال: ۱. حروف cc bb aaa چند تکه لا حرفی می توان ساخت به صورتی که هیچ یک از a ها کنار هم نباشند؟

مثال: با حروف abc ddee چند کلمه ۷ حرفی می توان ساخت به صورتی که هیچ یک از a و b و c تار هم نباشند؟

$$\frac{4!}{2!2!} \binom{5}{3} \times 3!$$
$$\textcircled{1} \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

$$\textcircled{7} \binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

$$\textcircled{c} (x+y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

سب سے دو عالم ای نیوز

(F) $\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} = 0$

$$\textcircled{2} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$$

$$\textcircled{7} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{n-i} = 2^{n-1}$$

(N) $\sum_{r=0}^k \binom{m}{r} \binom{n}{k-r} = \binom{m+n}{k}$

$$\textcircled{\wedge} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^r = \binom{rn}{n}$$

$$\textcircled{9} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{m}{i} = \sum_{i=0}^m \binom{n}{i} \binom{m}{i} = \binom{m+n}{n} = \binom{m+n}{m}$$

مثال: مقدار عبارت $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i$ چیست؟ طبق بسط دو جمله ای نیوتن

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i \times 1^{n-i} \rightarrow (a+1)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i$$

حالات قرارگیری اشیاء در ظروف:

① نوع ۱: اشیاء متفاوت در ظروف متفاوت به صورتی که تعداد اشیاء هر ظرف مشخص باشد.

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$$

② نوع ۲: اشیاء متفاوت در ظروف متفاوت به صورتی که مشخص نیست در کدام ظرف، در کدام ظرف n_r شیء قرار می گیرد.

$$\binom{n}{r} \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$$

③ نوع ۳: اشیاء متفاوت در ظروف یکسان به صورتی که تعداد اعضای گروه (تیم) مشخص باشد.

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!} \times \frac{1}{r_1! r_2! \dots r_r!}$$

نکته: تعداد حالات ظروف یکسان r می باشد.

④ نوع ۴: اشیاء متفاوت در ظروف متفاوت به صورتی که در قرارگیری اشیاء در ظروف نباید.

$$r^n = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_r} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} \quad (n_1 + n_2 + \dots + n_r = n)$$

⑤ نوع ۵: اشیاء متفاوت در ظروف متفاوت به صورتی که در هر ظرف حداقل یک شیء قرار گیرد.

$$r^n - \left[\binom{r}{1} (r-1)^n - \binom{r}{2} (r-2)^n + \dots + 0 \right]$$

⑥ نوع ۶: اشیاء یکسان در ظروف متفاوت به صورتی که در قرارگیری اشیاء در ظروف نباید.

$$\binom{n+r-1}{r-1} = \binom{n+r-1}{n} \quad (n_1 + n_2 + \dots + n_r = n)$$

⑦ نوع ۷: اشیاء یکسان در ظروف متفاوت به صورتی که در هر ظرف حداقل یک شیء قرار گیرد.

$$\binom{n-1}{r-1}$$