قضیه: W زیرفضای V ، $\dim V = n$

/ $\dim W \leq n$

/ اگر $\dim W = \cancel{\dim}\, n \rightarrow W = V$

(اگر B فرم سطری پلکانی کاهش یافته A باشد: ستون‌های متناظر ستون‌های دارای ضرایب پیشرو B در A مستقل خطی هستند و پایه برای فضای برداری حاصل از ستون‌ها (تشکیل هستند) ← برای گسترش یک مجموعه مستقل خطی به پایه با فرض داشتن یک مجموعه مولد: ماتریسی که ستون‌هایش بردارهای مجموعه مستقل و مولد هستند را تشکیل داده و فرم سطری پلکانی تبدیل می‌کنیم ← ستون‌های متناظر ضرایب پیشرو در ماتریس اولیه همان پایه هستند!

\ اشتراک زیرفضاها ← زیرفضا

/ اجتماع زیرفضاها ← همیشه ~~لزوما~~ زیرفضا نیست

$\text{span}\left(\bigcup_{i=1}^{k} W_i\right) =$ کوچکترین زیرفضای شامل W_1 تا W_k

$\downarrow$

$=$ جمع زیرفضاها

$\rightarrow W_1 + \dots + W_k = \text{span}\left(\bigcup_{i=1}^{k} W_i\right)$

(مجموع یک سری زیرفضا: یک سری بردار از هر کدام انتخاب و جمع کنیم)

$$W_1 + \dots + W_k = \{v_1 + \dots + v_k \mid v_1 \in W_1, \dots, v_k \in W_k\}$$

فقط برای دو تا برقرار است

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$$

\ زیرفضاهای مستقل

$W_1, \dots, W_k \in V$ زیرفضا $\iff$ مستقل

$\forall v_1 \in W_1, \dots, v_k \in W_k : v_1 + \dots + v_k = 0$ ← $v_1 = \dots = v_k = 0$

/ جمع زیرفضاهای مستقل: جمع مستقیم

$W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_k$

نماد: $W_1 \oplus \dots \oplus W_k$

قضیه: W_1 تا W_k مستقل ← نمایش هر بردار در $W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ یکتا است

قضیه: اگر W_1 و W_2 مستقل $\leftrightarrow W_1 \cap W_2 = \{0\}$ (فقط برای دو تا برقرار است)

قضیه: $W_1, \dots, W_k$ زیرفضاهای متناهی البعد V و B_i پایه W_i باشد آنگاه $B = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$

① B یک مجموعه مولد برای $W_1 + \dots + W_k$ است

② اگر W_iها مستقل باشند ← B پایه برای $W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ است

$\dim(W_1 + \dots + W_k) \leq \dim W_1 + \dots + \dim W_k \longrightarrow$ $=$ در صورتی $\Rightarrow$ W_iها مستقل باشند

فصل 2 ـ جبر

$T: V \to W$
تابع

$T(0)=0$

T خطی است اگر $\leftrightarrow$ $T(u+av) = Tu + aTv$ \ خواص تفاضلی

$T(a_1v_1 + \dots + a_kv_k) = a_1Tv_1 + \dots + a_kTv_k$

دو تابع خطی $S, T: V \to W$

$(S+T)v := Sv + Tv$

$(aT)v := aTv$

جمع دو تابع خطی و ضرب تفاضلی در اسکالر نیز خود خطی هستند

اگر تبدیل خطی دامنه و برد یکسان داشته باشد: عملگر خطی

فضای توابع خطی زیر فضای فضای کل توابع است.

$\mathcal{L}(V)$ فضای عملگرهای خطی از V به V

$F: \{F: V \to W\}$ فضای همه توابع از V به W

$\mathcal{L}: \{T: V \to W$ که T خطی$\}$ فضای توابع خطی $= \mathcal{L}(V, W)$

ترکیب دو تفاضلی؟

خود یک تفاضلی است

$V \xrightarrow{T} W \xrightarrow{S} U$

$S \circ T = ST : V \to U$

$v \mapsto S(Tv)$

که همه خواص ضرب جز جابه‌جایی را دارد.

$R(ST) = (RS)T$, $S(T_1 + T_2) = ST_1 + ST_2$, $SI_V = S$, $S(aT) = a(ST) = (aS)T$ ضرب اسکالر

تنها خاصیت برقراری تساوی $ST = TS$ فقط برای عملگرها بررسی می‌شود (دامنه و برد هم‌اندازه) و لزوماً برقرار نیست

$T: V \to W$

$S: W \to V$

پوشا و یک به یک $\to$ اگر وارون‌پذیر $\left\{ \begin{array}{l} ST = I_V \\ TS = I_W \end{array} \right.$ $\longleftrightarrow$ T وارون‌پذیر

وارون تبدیل خطی مثل ضرب و جمع تبدیلات خطی، خطی است. (اگر $S, T \in \mathcal{L}(V)$: $TS = I \Leftrightarrow ST = I$ (از ترکیب))

قضیه: $v_1, \dots, v_n$ پایه V باشد $\Leftarrow$ تبدیل خطی یکتا T عضو $\mathcal{L}(V,W)$ وجود دارد که $\forall i: Tv_i = w_i$

$w_1, \dots, w_n \in W$

← برای مشخص کردن یک تبدیل روی فضای n بعدی: کافیست n مقدار آن را بدانیم.

$T: V \to W$ خطی

فضای پوچ $\text{null}(T) = \{v \in V \mid Tv = 0\}$

تصویر T $R(T) = T(V) = \{w \in W \mid w = Tv ;$ برای $v \in V\}$

این دو خود زیرفضا هستند