مثال(سراسری ۷۷ ریاضی) حاصل انتگرال $\int \frac{\cos 2x\, dx}{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}$ کدام است؟ $(x \neq k\pi - \frac{\pi}{4})$

۱) $-\sin x+\cos x+c$ ۲) $-\sin x-\cos x+c$ ۳) $\sin x-\cos x+c$ ۴) $\sin x+\cos x+c$

با توجه به رابطه‌ی $\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=\sin x+\cos x$ داریم:

$$\int \frac{\cos 2x\, dx}{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}=\int \frac{(\cos^2 x-\sin^2 x)}{\sin x+\cos x}dx=\int(\cos x-\sin x)dx=\sin x+\cos x+c$$

مثال- حاصل $\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$ کدام است؟

۱) $\tan x-\cot gx+c$ ۲) $\tan x+\cot gx+c$

۳) $-\tan x+\cot gx+c$ ۴) $-\tan x-\cot gx+c$

$$\int\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int(1+\tan^2 x)(1+\cot g^2 x)dx=\int(1+\tan^2 x+\cot g^2 x+1)\,dx=\tan x-\cot gx+c$$

مثال (سراسری ۷۳ ریاضی) حاصل $\int 2\tan x.\cot g2x\, dx$ کدام است؟

۱) $x+\tan x+c$ ۲) $x+\cot gx+c$ ۳) $2x-\tan x+c$ ۴) $2x-\cot gx+c$

با توجه به رابطه‌ی مثلثاتی $\tan x-\cot gx=-2\cot g2x$ داریم:

$$\int 2\tan x\cot g2x\, dx=\int\tan x(\cot gx-\tan x)dx=\int(1-\tan^2 x)dx=\int(1)dx-\int\tan^2 x\,dx$$

$$y=x-(\tan x-x)+c=2x-\tan x+c$$

مثال(سراسری ۷۵ ریاضی) حاصل انتگرال $\int(\frac{\sin 3x}{\cos x}+\tan x)dx$ برابر کدام است؟

۱) $-\cos 2x+c$ ۲) $\sin 2x+c$ ۳) $3\sin^2 x+c$ ۴) $3\cos^2 x+c$

$$\int(\frac{\sin 3x}{\cos x}+\frac{\sin x}{\cos x})dx=\int\frac{\sin 3x+\sin x}{\cos x}dx=\int\frac{2\sin 2x\cos x}{\cos x}dx$$

$$\int 2\sin 2x dx=\frac{-2}{2}\cos 2x+c=-\cos 2x+c$$

☑ **نکته‌ی ۱۲:** در تست‌های محاسبه‌ی انتگرال نامعین که معمولاً در آزمون‌های دانشگاه آزاد نیز مطرح می‌گردد؛ با نگاه کردن به گزینه‌ها می‌توانیم بر اساس رابطه‌ی چهارم $\int ku'u^m d_x$ مقدار u را تشخیص داده و از رابطه‌ی فوق استفاده کنیم.

مثال (آزاد ۷۸ ریاضی) حاصل انتگرال $\int(\tan x+\cot gx)^5(\tan x-\cot gx)dx$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{4}(\tan x+\cot gx)^4+c$ ۲) $\frac{1}{5}(\tan x+\cot gx)^5+c$

۳) $\frac{1}{6}(\tan x+\cot gx)^6+c$ ۴) $(\tan x+\cot gx)^5+c$

با توجه به گزینه‌ها $u=\tan x+\cot gx$ بوده و می‌بایستی در کنار آن u' نیز موجود باشد که داریم:

$$u'=1+\tan^2 x-1-\cot g^2 x=\tan^2 x-\cot g^2 x$$

حال در تابع تحت علامت انتگرال اگر تنها یک عامل از توان پنجم را در پرانتز دیگر ضرب کنیم به فرمول چهارم می‌رسیم.

$$I = \int (\tan x + \cot gx)^{۴} (\tan^{۲} x - \cot g^{۲} x) dx = \frac{۱}{۵} (\tan x + \cot gx)^{۵} + c$$

مثال(آزاد ۸۱ ریاضی) اگر $\int (x\cos x\sqrt{\sin x} - \sin x\sqrt{\sin x})^{۲} xdx = \frac{(x\cos x - \sin x)^{m}}{n} + c$ باشد؛ آنگاه حاصل $(m+n)$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۰ ۳) ۴ ۴) ۶-

با توجه به $u = x\cos x - \sin x$ برای مشتق آن داریم:

$$u' = (۱\times\cos x - x\sin x) - \cos x = -x\sin x$$

حال می‌بایستی u و u' را در عبارت تحت علامت انتگرال بسازیم:

$$I = \int (x\cos x\sqrt{\sin x} - \sin x\sqrt{\sin x})^{۲} xdx = \int (x\cos x - \sin x)^{۲} x\sin x dx$$

$$y = \frac{-۱}{۳}(x\cos x - \sin x)^{۳} + c \Rightarrow m + n = ۰$$

مثال (سراسری ۷۳ ریاضی) حاصل $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} \cos^{۳} ۲xdx$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

به شیوه‌ی توان فرد عمل می‌کنیم که داریم:

$$I = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} \cos ۲x (\cos ۲x)^{۲} dx = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} \cos ۲x(۱ - \sin^{۲} ۲x) dx$$

$$I = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} (\cos ۲x - \cos ۲x \sin^{۲} ۲x) dx = \frac{۱}{۲}\sin ۲x - \frac{\frac{۱}{۲}}{۳}(\sin ۲x)^{۳} \Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} = \frac{۱}{۳}$$

مثال (سراسری ۷۰ ریاضی) مقدار $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۸}} \sin^{۲} ۲xdx$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۸}(\frac{\pi}{۲} - ۱)$ ۲) $\frac{۱}{۱۶}(\pi - ۱)$ ۳) $\frac{۱}{۸}(\pi - ۱)$ ۴) $\frac{۱}{۱۶}(\frac{\pi}{۲} - ۱)$

به شیوه‌ی توان زوج داریم:

$$I = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۸}} \sin^{۲} ۲xdx = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۸}} \frac{۱ - \cos ۴x}{۲} dx = \frac{۱}{۲}x - \frac{۱}{۸}\sin ۴x \Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۸}} = \frac{\pi}{۱۶} - \frac{۱}{۸} = \frac{۱}{۸}(\frac{\pi}{۲} - ۱)$$

☑ **نکته‌ی۱۳:** اگر تابع مثلثاتی به صورت توان‌های زوج و فرد باشد از روش توان فرد برای محاسبه‌ی انتگرال کمک می‌گیریم.

مانند:
$$I = \int \sin^{۳} x \cos^{۲} xdx = \int \sin x(\sin^{۲} x)\cos^{۲} xdx = \int \sin x \cos^{۲} x(۱ - \cos^{۲} x)dx$$

$$I = \int (\sin x \cos^{۲} x - \sin x \cos^{۴} x)dx = \frac{-۱}{۳}\cos^{۳} x + \frac{۱}{۵}\cos^{۵} x + c$$

☑ **نکته‌ی۱٤:** هرگاه انتگرال مثلثاتی به صورت حاصلضرب باشد؛ ابتدا می‌بایستی آن را به مجموع تبدیل کنیم و سپس انتگرال بگیریم. مانند:

(سراسری ۷۳ ریاضی در محاسبه‌ی سطح محصور)

$$I_1 = \int \cos 2x \sin x \, dx$$

$$\sin x \cos 2x = \frac{1}{2}(\sin 3x - \sin x)$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\int (\sin 3x - \sin x)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{3}\cos 3x + \cos x\right] + c$$

(سراسری ۸۷ در محاسبه‌ی سطح محصور)

$$I_2 = \int 2\sin x \cos 3x \, dx$$

$$2\sin x \cos 3x = \sin 4x - \sin 2x \Rightarrow I = \int (\sin 4x - \sin 2x)\,dx = \frac{-1}{4}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + c$$

☑ **نکته‌ی۱۵:** هرگاه در تابع کسری؛ مشتق مخرج در صورت کسر موجود باشد به عامل لگاریتم طبیعی به شکل زیر برخورد خواهیم کرد.

$$\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln|u| + c$$

به مثال‌ها دقت کنید:

$$I_1 = \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \ln(x^2+1) + c$$

$$I_2 = \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$$

$$I_3 = \int \frac{3}{8x+1}\,dx = 3\int \frac{1}{8x+1}\,dx = \frac{3}{8}\int \frac{8}{8x+1}\,dx = \frac{3}{8}\ln|8x+1| + c$$

$$I_4 = \int \frac{\cos x}{1+\sin x}\,dx = \ln|1+\sin x| + c$$

$$I_5 = \int \cot g x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln|\sin x| + c$$

$$I_6 = \int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + c$$

$$I_7 = \int \frac{x^2+1}{x}\,dx = \int \left(x + \frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{2}x^2 + \ln|x| + c$$

$$I_8 = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$

☑ **نکته‌ی۱۶:** بر اساس مشتق عبارت $\operatorname{Arctan} u$ نیز در محاسبه‌ی انتگرال داریم:

$$\int \frac{u'}{1+u^2}.dx = \operatorname{Arctan} u + c$$

به مثال‌ها دقت کنید:

$$I_1 = \int \frac{2x}{1+x^4}.dx = \int \frac{2x}{1+(x^2)^2}\,dx = \operatorname{Arctan}(x^2) + c$$

$$I_2 = \int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx = \operatorname{Arctan}(\sin x) + c$$

$$I_3 = \int \frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x}\,dx = \int \frac{\sin 2x}{1+(\sin^2 x)^2}\,dx = \operatorname{Arctan}(\sin^2 x) + c$$

☑ **نکته‌ی۱۷: تغییر متغیر در محاسبه‌ی انتگرال:**

هرگاه پس از این که تابع تحت علامت انتگرال را از شکل رادیکال و کسر خارج کرده و در بررسی فرمول چهارم این فرمول جواب ندهد از تغییر متغیر کمک می‌گیریم؛ به سه دسته از این تغییر متغیرها در توابع جبری و مثلثاتی توجه کنید:

الف- تغییر متغیر در توابع جبری: با برخورد با عواملی که دارای توان گویا یا توان بزرگ هستند می‌توان این عوامل را به عنوان متغیر جدیدی در نظر گرفت؛ مانند:

$$I_1 = \int x(x+1)^{100}\,dx$$

در این انتگرال فرمول (۴) جواب نمی‌دهد و با انتخاب عاملی که توان بزرگ دارد به عنوان متغیر جدید داریم:

$$u = x+1 \quad , \quad x = u-1 \quad , \quad d_x = d_u$$

$$I_1 = \int (u-1)u^{100}\,du = \int (u^{101} - u^{100})\,dx = \frac{1}{102}u^{102} - \frac{1}{101}u^{101} + c$$

$$y = \frac{1}{102}(x+1)^{102} - \frac{1}{101}(x+1)^{101} + c$$

$$I_2 = \int x\sqrt{x+1}\,dx = \int x(x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$x+1 = u \quad , \quad x = u-1 \quad , \quad d_x = d_u$$

$$I^2 = \int (u-1)u^{\frac{1}{2}}\,du = \int (u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}})\,du = \frac{1}{\frac{5}{2}}u^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{\frac{3}{2}}u^{\frac{3}{2}} + c$$

$$y = \frac{2}{5}u^2\sqrt{u} - \frac{2}{3}u\sqrt{u} + c = \frac{2}{5}(x+1)^2\sqrt{x+1} - \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} + c$$

تمرین- حاصل انتگرال $\int \frac{x^7}{\sqrt{x^4+1}}dx$ را بیابید؟

مثال(سراسری ۷۶ ریاضی) اگر $\int \frac{3x+1}{\sqrt{2x+1}}dx = \sqrt{2x+1}.f(x) + c$ باشد؛ آنگاه $f(x)$ کدام است؟

۱) $2x-1$ ۲) $x-1$ ۳) $x+1$ ۴) x

می‌توانیم عامل رادیکال مخرج را نیز به عنوان u فرض کنیم که داریم:

$$u = \sqrt{2x+1} \Rightarrow du = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}}dx \Rightarrow dx = \sqrt{2x+1}\,du \quad , \quad u^2 = 2x+1 \quad , \quad x = \frac{u^2-1}{2}$$

$$\int \frac{3x+1}{\sqrt{2x+1}}dx = \int \frac{3x+1}{\sqrt{2x+1}} \times \sqrt{2x+1}\,du = \int (3x+1)\,du = \int \left(\frac{3u^2-3}{2}+1\right)du$$

$$\int \frac{3u^2-3+2}{2}du = \int \left(\frac{3u^2-1}{2}\right)du \Rightarrow y = \frac{\frac{3}{2}}{3}u^3 - \frac{1}{2}u + c$$

$$y = \frac{1}{2}(2x+1)\sqrt{2x+1} - \frac{1}{2}\sqrt{2x+1} + c = \sqrt{2x+1}\left(x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + c \Rightarrow f(x) = x$$

ب- در محاسبه‌ی انتگرال $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ با توجه به دامنه‌ی تعریف $-a < x < a$ می‌توانیم از متغیر مثلثاتی $x = a\sin\theta$ کمک بگیریم که داریم:

$$x = a\sin\theta \quad , \quad dx = a\cos\theta . d\theta$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{a\cos\theta d\theta}{\sqrt{a^2 - a^2\sin^2\theta}} = \int \frac{a\cos\theta d\theta}{a\cos\theta} = \int d\theta = \theta + c$$

و با یافتن θ داریم:

$$x = a\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{x}{a} \Rightarrow \theta = \text{Arcsin}\frac{x}{a}$$