Subject:
Date: Day: Time:

خطای این روش از مرتبه $\sqrt{2}\Delta x^2$ است.

با جایگذاری داریم

$$\frac{1}{K}\left(T_{i,j+1}-T_{i,j}\right)=\frac{C}{2h^2}\left(T_{i-1,j}-2T_{i,j}+T_{i+1,j}\right)+\frac{C}{2h^2}\left(T_{i-1,j+1}-2T_{i,j+1}+T_{i+1,j+1}\right)$$

$$\frac{CK}{h^2}=\lambda$$

$$\Rightarrow \overbrace{-\frac{\lambda}{2}T_{i-1,j+1}+(1+\lambda)T_{i,j+1}-\frac{\lambda}{2}T_{i+1,j+1}}^{\text{مجهولات}}=\overbrace{\frac{\lambda}{2}T_{i-1,j}+(1-\lambda)T_{i,j}+\frac{\lambda}{2}T_{i+1,j}}^{\text{معلومات}}$$

در معادلات فوق ۳ مقدار معلوم در زمان قدیم و ۳ مقدار مجهول در زمان جدید وجود دارد.

در واقع مزیت روش کرنک نیکلسون بر روش ضمنی در این است که روش کرنک نیکلسون از اطلاعات ۳ نقطه استفاده می‌کند تا مجهولات را در زمان جدید به دست بیاورد. در حالیکه روش ضمنی تنها با استفاده از یک داده‌ی معلوم، مجهولات را در زمان جدید به دست می‌آورد.

با اعمال معادله نهایی بر روی همه گره های شبکه یک ماتریس ۳ قطری بدست می‌آید که در ماتریس های بسیار بزرگ حل آن با روش توماس انجام می‌گیرد.

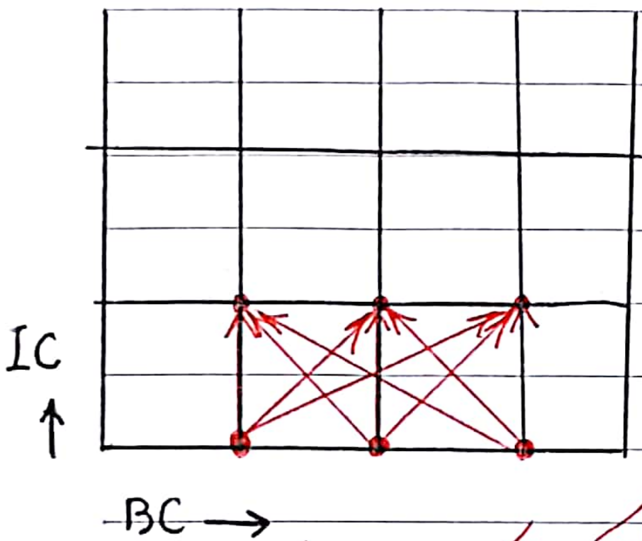
Subject:
Date: Day: Time:

فرم ماتریسی روش کرنک - نیکلسون

$$\begin{bmatrix} 1+\lambda & -\frac{\lambda}{2} & 0 & 0 & \cdots \\ -\frac{\lambda}{2} & 1+\lambda & -\frac{\lambda}{2} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -\frac{\lambda}{2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & -\frac{\lambda}{2} & 1+\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{1,j+1} \\ T_{2,j+1} \\ T_{3,j+1} \\ \vdots \\ T_{n,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{2}T_{0,j}+(1-\lambda)T_{1,j}+\frac{\lambda}{2}T_{2,j}+\frac{\lambda}{2}T_{0,j+1} \\ \frac{\lambda}{2}T_{1,j}+(1-\lambda)T_{2,j}+\frac{\lambda}{2}T_{3,j} \\ \vdots \\ \frac{\lambda}{2}T_{n-2,j}+(1-\lambda)T_{n-1,j}+\frac{\lambda}{2}T_{n,j}+\frac{\lambda}{2}T_{n,j+1} \end{bmatrix}$$

در این فرم ماتریسی می بینیم که درایه های قطر اصلی از کلیه درایه های سطر بیشتر است

پس این روش بدون قید و شرط پایدار است



مثال: معادله‌ی انتقال حرارت ناپایای زیر را به روش کرنک نیکلسون حل نمایید

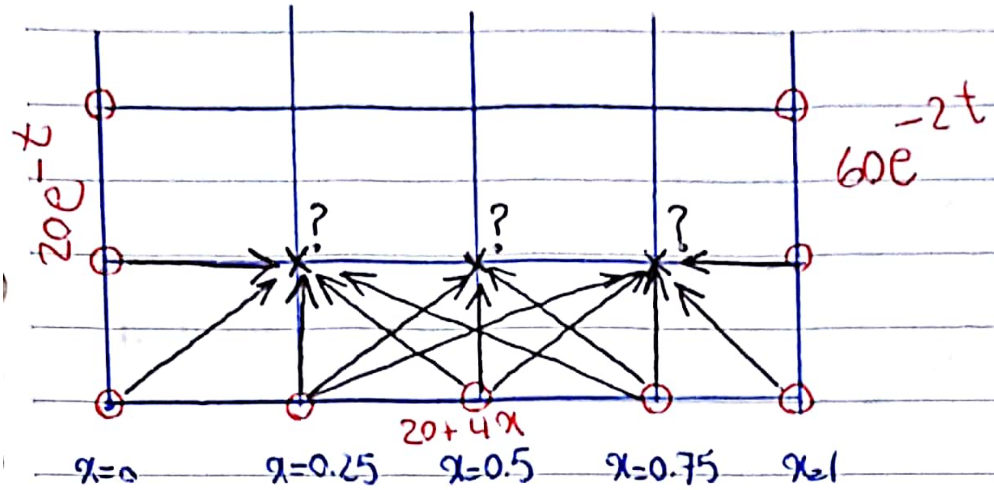
$$T_t = C\,T_{xx} \qquad \begin{cases} T(x,0)=20+40x \\ T(0,t)=20e^{-t} \\ T(1,t)=60e^{-2t} \end{cases} \qquad \begin{aligned} \Delta x &= 0.25 \\ \Delta t &= 0.1 \\ C &= 0.5 \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{Ck}{h^2} = \frac{0.5\times 0.1}{(0.25)^2} = 0.8$$

Subject:
Date: Day: Time:

$$-\frac{\lambda}{2}T_{i-1,j+1}+(1+\lambda)T_{i,j+1}-\frac{\lambda}{2}T_{i+1,j+1}=\frac{\lambda}{2}T_{i-1,j}+(1-\lambda)T_{i,j}+\frac{\lambda}{2}T_{i+1,j}$$

$$\rightarrow 0.4\,T_{i-1,j+1}+1.8\,T_{i,j+1}-0.4\,T_{i+1,j+1}=0.4\,T_{i-1,j}+0.2\,T_{i,j}+0.4\,T_{i+1,j}$$



حال فرم ماتریسی را می‌نویسیم

$$\begin{bmatrix} 1.8 & -0.4 & 0 \\ -0.4 & 1.8 & -0.4 \\ 0 & -0.4 & 1.8 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} T_{1,1} \\ T_{2,1} \\ T_{3,1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.4T_{0,0}+0.2T_{1,0}+0.4T_{2,0}+0.4T_{0,1} \\ 0.4T_{1,0}+0.2T_{2,0}+0.4T_{3,0} \\ 0.4T_{2,0}+0.2T_{3,0}+0.4T_{4,0}+0.4T_{4,1}\end{bmatrix}$$

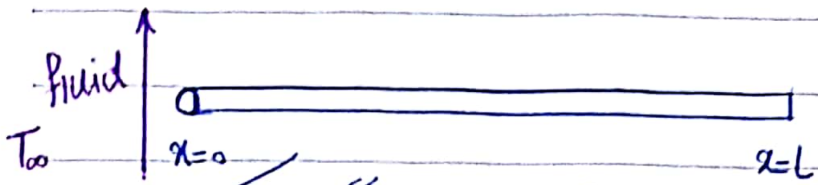
و با حل این ماتریس خواهیم داشت

$$\begin{cases} T_{1,1}=29.42 \\ T_{2,1}=39.30 \\ T_{3,1}=47.43 \end{cases}$$

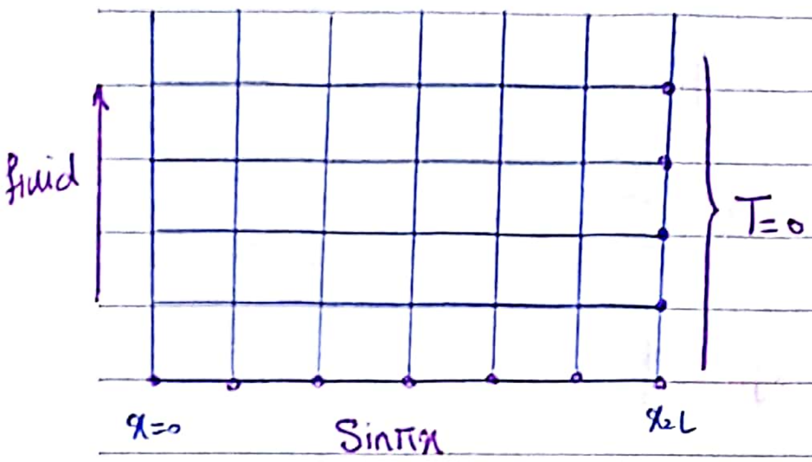
SADAF

مثال: حل معادله‌ی انتقال حرارت ناپایدار به روش ضمنی:

$$T_t = C T_{xx} \qquad \begin{cases} K\dfrac{\partial T}{\partial x}(0,t) = h\left(T(0,t) - T_{fluid}\right) \\ T(L,t) = 0 \\ T(x,0) = \sin \pi x \end{cases}$$



فرق این مسئله با مسائل قبلی این است که باید شرط مرزی اول را هم گسسته کنیم.



$$T_{i,j} = -\lambda T_{i-1,j+1} + (1+2\lambda) T_{i,j+1} - \lambda T_{i+1,j+1}$$

گسسته‌سازی شرط مرزی نوع سوم: $K\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0} = h\left(T(0,t) - T_{fluid}\right)$

۱- چون روش ضمنی است حتماً مشتق مکان در زمان جدید نوشته می‌شود.

۲- مشتق مرتبه اول را به روش تفاضل مرکزی گسسته‌سازی کنیم.

Subject:
Date: Day: Time:

$$k \frac{T_{i+1,j+1} - T_{i-1,j+1}}{2\Delta x} = h(T_{0,j} - T_{fluid}) \qquad i=0$$

$$\rightarrow k \frac{T_{1,j+1} - T_{-1,j+1}}{2\Delta x} = h(T_{0,j} - T_{fluid}) \qquad T_{-1,j} = T_{fluid}$$

که این یک فرض فیزیکی قابل قبول است.

$$\rightarrow T_{0,j} = \frac{k}{2\Delta x h}(T_{1,j+1} - T_{fluid}) + T_{fluid}$$

در اینجا از $i=0$ شروع می‌کنیم زیرا شرط مرزی خود مجهول است.

$$i=0 \rightarrow T_{0,j} = \frac{k}{2h\Delta x}(T_{1,j+1} - T_{fluid}) + T_{fluid} = -\lambda \overset{T_{fluid}}{T_{-1,j+1}} + (1+2\lambda)T_{0,j+1} - \lambda T_{1,j+1} \rightarrow$$

پس از مرتب سازی داریم:

معادله اول:

$$(1+\lambda - \frac{k}{2h\Delta x})T_{fluid} = (1+2\lambda)T_{0,j+1} - (\frac{k}{2h\Delta x}+\lambda)T_{1,j+1}$$

معادله دوم:

$$i=1 \rightarrow T_{1,j} = -\lambda T_{0,j+1} + (1+2\lambda)T_{1,j+1} - \lambda T_{2,j+1}$$

$$\vdots$$

معادله n ام

$$i=n-1 \rightarrow T_{n,j} = -\lambda T_{n-2,j+1} + (1+2\lambda)T_{n,j+1} - \lambda T_{n,j+1}$$

که می‌توان معادلات بالا را فرم ماتریسی نیز نوشت.

Subject:
Date: Day: Time:

معادلات حاکم بر جریان سیال (معادلات بقاء یا انتقال)

Transport eq   conservatio eq

۱- معادله‌ی بقای جرم (پیوستگی)   1 Continuty

2- معادله‌ی بقای مومنتوم (قانون دوم نیوتن)   2- Momentum Transport

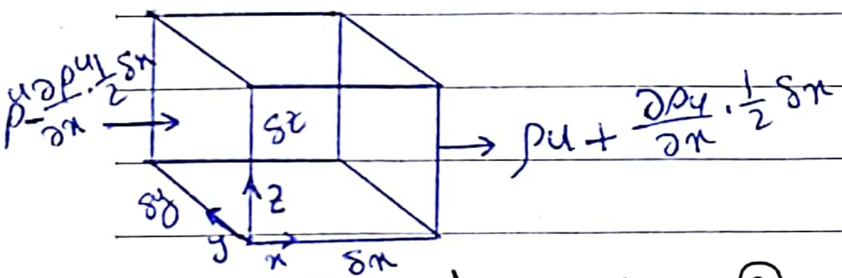
3- معادله‌ی بقای انرژی (قانون اول ترمودینامیک)   3- Energy Transport

4- معادله‌ی بقای اجزاء (گونه‌های شیمیایی)   4- Species Transport

معادلات اول و دوم در تمام مسائل جریان سیال حل می‌شوند

اگر میدان دانسیته متغیر باشد معادله‌ی حالت نیز استفاده می‌شود.

معادله‌ی پیوستگی:



نرخ جریان جرم ورودی به سیال − نرخ جریان خروجی جرم (صفحات) ② = نرخ افزایش جرم در المان سیال ①

① $\frac{\partial}{\partial t}(\rho\, \delta x\, \delta y\, \delta z) = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) \delta x\, \delta y\, \delta z$

با نوشتن سمت راست، شارش در جهت‌های x، y و z داریم

SADAF