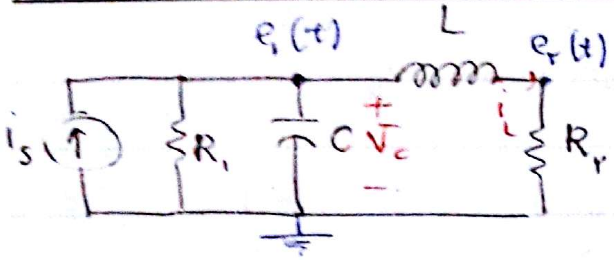
Subject
Date



$i_L(0_-) = I_0$

تجزیه و تحلیل گره :

$v_c(0_-) = V_0$

$$KCL(1):\ C\frac{de_1}{dt} + \left(i_L(0) + \frac{1}{L}\int_0^t (e_1 - e_2)\, d\tau\right) + \frac{e_1}{R_1} = i_s \qquad (1$$

$$KCL(2):\ -\left(i_L(0_-) + \frac{1}{L}\int_0^t (e_1 - e_2)\, d\tau\right) + \frac{e_2}{R_2} = 0 \qquad (2$$

از آنجایی که مشتق گرفتن از معادله، جواب اضافی وارد مسئله می‌کند، لذا حتی المقدور از مشتق گیری پرهیز می‌کنیم.

$$1+2:\ C\frac{de_1}{dt} + \frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_2} = i_s \qquad (3$$

$$\text{مشتق از ۲}:\ -\frac{1}{L}(e_1 - e_2) + \frac{1}{R_2}\frac{de_2}{dt} = 0 \qquad (4$$

e_1 را از معادلات حذف می‌کنیم

$$LC\frac{d^2e_2}{dt^2} + \left(R_2C + \frac{L}{R_1}\right)\frac{de_2}{dt} + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)e_2 = R_2\, i_s$$

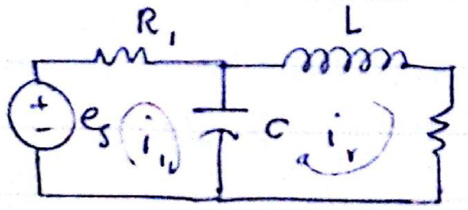
$$e_2(0_-) = ? \qquad \frac{de_2}{dt}(0_-) = ? \qquad e_2 = R_2\, i_L(0_-) = R_2 I_0$$

$$e_2 = R_2 i_L \longrightarrow \frac{de_2}{dt} = R_2\frac{di_L}{dt} = R_2\left(\frac{v_c - R_2 i_L}{L}\right)\Bigg|_{t=0} = R_2\left(\frac{V_0 - R_2 I_0}{L}\right)$$

تجزیه و تحلیل مش :

برای همان مدار بالای صفحه که با تحلیل گره تحلیلش کردیم :

$\equiv$



$e_s = i_s R_1$

KVL (۱) : $R_1 i_1 + v_c(0^-) + \frac{1}{C}\int_{0^-}^{t} (i_1 - i_2)\,dt \underbrace{- e_s}_{i_s R_1} = 0$ (۱

KVL (۲) : $L\frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 - \left(v_c(0^-) + \frac{1}{C}\int_{0^-}^{t} (i_1 - i_2)\,dt \right) = 0$ (۲

$1 + 2$: $R_1 i_1 + L\frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 - R_1 i_s = 0$ (۳

مشتق از ۲ : $R_1\frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C}(i_1 - i_2) - R_1\frac{di_s}{dt} = 0$ (۴

ادامه‌ش مشابه قبله!

حل مدارها در حالت کلی: (مدارهای مرتبه‌ی n ام)

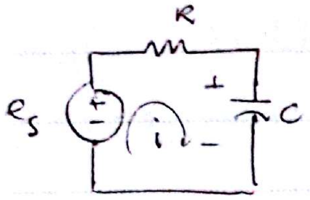
$$a_0\frac{d^n y}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n+1} = b_0\frac{d^m w}{dt^m} + b_1\frac{d^{m-1} w}{dt^{m-1}} + \dots$$ ضرایب ثابتند!

طبیعتاً برای حل به n شرط اولیه نیازمندیم. $y(0^-)$ و $y'(0^-)$ و ... و $y^{(n-1)}(0^-)$

$$y = \underbrace{y_h}_{\text{پاسخ معادله‌ی همگن}} + \underbrace{y_p}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

همان طور که از نحوه‌ی حل معادله‌ی همگن معلوم است، پاسخ همگن مستقل از ورودی‌های مدار بوده و مربوط است به هیکل مدار و پاسخ خصوصی هم مربوط به ورودی‌های مداره.

$$y_h = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$$



$$e_s = u(t)\cos\omega t$$

$$KVL:\ Ri + v_c = e_s \longrightarrow R\frac{di}{dt} + \frac{dv_c}{dt} = \frac{de_s}{dt} \longrightarrow$$

$$R\frac{di}{dt} + \frac{i}{c} = \frac{de_s}{dt} \longrightarrow R\frac{di}{dt} + \frac{1}{c}\,i = \delta(t)\cos\omega t - \omega \sin\omega t\ u(t)$$

$$= -\omega u(t)\sin\omega t + \delta(t)$$

$$a_0\frac{d^n y}{dt^n} + \cdots = b_0\frac{d^m w}{dt^m}$$

بدست آوردن پاسخ ضربه:

S_i ~ اصطلاحا میگیم فرکانس طبیعی مدار. فرکانس چون واحدش با فرکانس یکیه و طبیعی چون به مدار ربط داره.

- $n>m:\quad y(t) = \left(\sum_{i=1}^{n} k_i e^{S_i t}\right)u(t)$

اینجا $\delta(t)$ رو داریم چون مشتقات که از هم مستقل هستند و سمت چپ بوجود میاد و هیچ جوره حذف نمیشن باهم.

- $n=m:\quad y(t) = \left(\sum k_i e^{S_i t}\right)u(t) + A\,\delta(t)$

- $n<m:\quad y(t) = \left(\sum k_i e^{S_i t}\right)u(t) + A_1\delta(t) + A_2\delta'(t) + \cdots + A_{m-n}\,\delta^{(m-n)}(t)$

مثال: $y'' + 4y' + 3y = w' + 2w \qquad w = \delta(t)$ پاسخ ضربه چیست؟

معادله همگن: $y'' + 4y' + 3y = 0 \ \longrightarrow\ y_h(t) = \left(k_1 e^{-t} + k_2 e^{-3t}\right)u(t) \qquad \begin{matrix} 2>1 \\ n>m \end{matrix}$

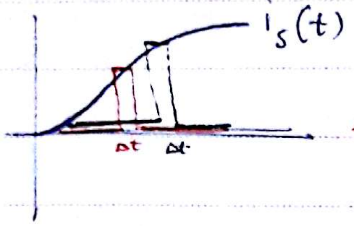
$$\xrightarrow{n>m} y(t) = \left(k_1 e^{-t} + k_2 e^{-3t}\right) \qquad y'(t) = \left(-k_1 e^{-t} - 3k_2 e^{-3t}\right)u(t) + (k_1+k_2)\delta(t)$$

$$y''(t) = \left(k_1 e^{-t} + 9k_2 e^{-3t}\right)u(t) + (-k_1 - 3k_2)\,\delta(t) + (k_1+k_2)\,\delta'(t)$$

$$\rightarrow y'' + 4y' + 3y = \delta'(t) + 2\delta(t) \xrightarrow[\text{جایگذاری}]{\text{معادله}} (3k_1 + k_2)\,\delta(t) + (k_1+k_2)\,\delta'(t) \equiv \delta' + 2\delta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3k_1 + k_2 = 2 \\ k_1 + k_2 = 1 \end{cases} \longrightarrow k_1 = \frac{1}{2} \ \ \&\ \ k_2 = \frac{1}{2}$$

برای مدارهای LTI، اگر پاسخ ضربه را داشته باشیم، میتوانیم پاسخ حالات دیگر را بدست بیاریم از روش
چون میتونیم هر ورودی رو با چندین تابع پالس تقریب بزنیم.

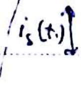


$\Delta t \to 0$

پاسخ حالت صفر - ورودی دلخواه (مدار LTI)

۱. شکل موج بالا را به صورت جمع پالسها مینویسیم.

$$\Delta P_\Delta(t') = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & 0<t'<\Delta \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$



$$\equiv i_s(t_0)\, P_\Delta(t'-t_0)\,\Delta$$

$$i_s(t_k)\, P_\Delta(t'-t_k)$$

$$\Rightarrow i_s(t') = \sum_{k=0}^{n-1} i_s(t_k)\, P_\Delta(t'-t_k)\,\Delta$$

$i_s(t')$ پاسخ برای ورودی $= \sum_k i_s(t_k)\, h_\Delta(t'-t_k)\,\Delta$

$\Delta \to 0,\ n \to \infty$: $r(t) = \int_{t_0}^{t} i_s(t')\, h(t-t')\, dt'$ انتگرال کانولوشن $\qquad r(t)$: خروجی مدار

t_0 همان حالت صفر مداره!!

۲. میتوان ورودی را به مجموع پله‌ها تبدیل کرد.

$t-t'=\tau \qquad d\tau = -dt'$

$$r(t) = \int_0^{t-t_0} i_s(t-\tau)\, h(\tau)\, d\tau \qquad t_0 = 0 \to r(t) = \int_0^{t} i_s(t-t')\, h(t')\, dt'$$

تبدیل لاپلاس

$$R(s) = I(s)\, H(s)$$

مثال: یک میله بینهایت با چگالی بار خطی ρ وجود دارد. پتانسیل را در نقطه‌ی x میخواهیم.

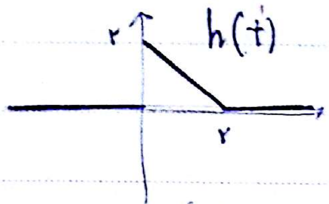
$$V(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(x')\, dx'}{4\pi\epsilon_0 |x-x'|}$$

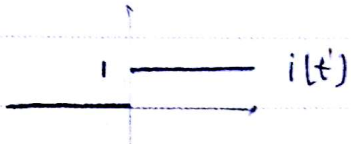
فرض میکنیم $g(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |r|}$. $g(r)$ را تابع گرین مسأله مینامیم.

انتگرال کانولوشن : $V(x)=\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x')\, g(x-x')\, dx'$

به این شکل هم نشان میدهیم : $V(x)=\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x')\, g(x,x')\, dx'$

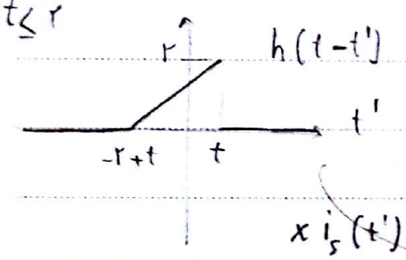
مثال : پاسخ ورودی ضربه به مداری مطابق ذیل است. پاسخ به ورودی $i(t)$ چه میتواند باشد؟



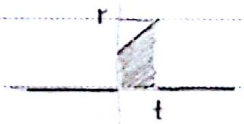


$r(t) = \int_0^t i_s(t')\, h(t-t')\, dt'$ یا $\int_0^t i_s(t-t')\, h(t')\, dt'$

$0 \le t \le 2$

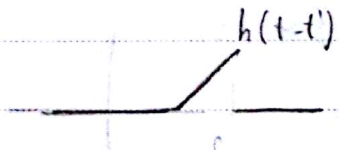


$\times\, i_s(t') \rightarrow$



$\int_0^t i_s(t')\, h(t-t')\, dt' = \frac{-t^2+4t}{2} \quad 0<t<2$

$t>2$



$\times\, i_s(t') \rightarrow$

$\int_0^t i_s(t')\, h(t-t')\, dt' = 2$

در نتیجه $r(t) = \begin{cases} \frac{-t^2+4t}{2} & 0<t<2 \\ 2 & t \ge 2 \end{cases}$