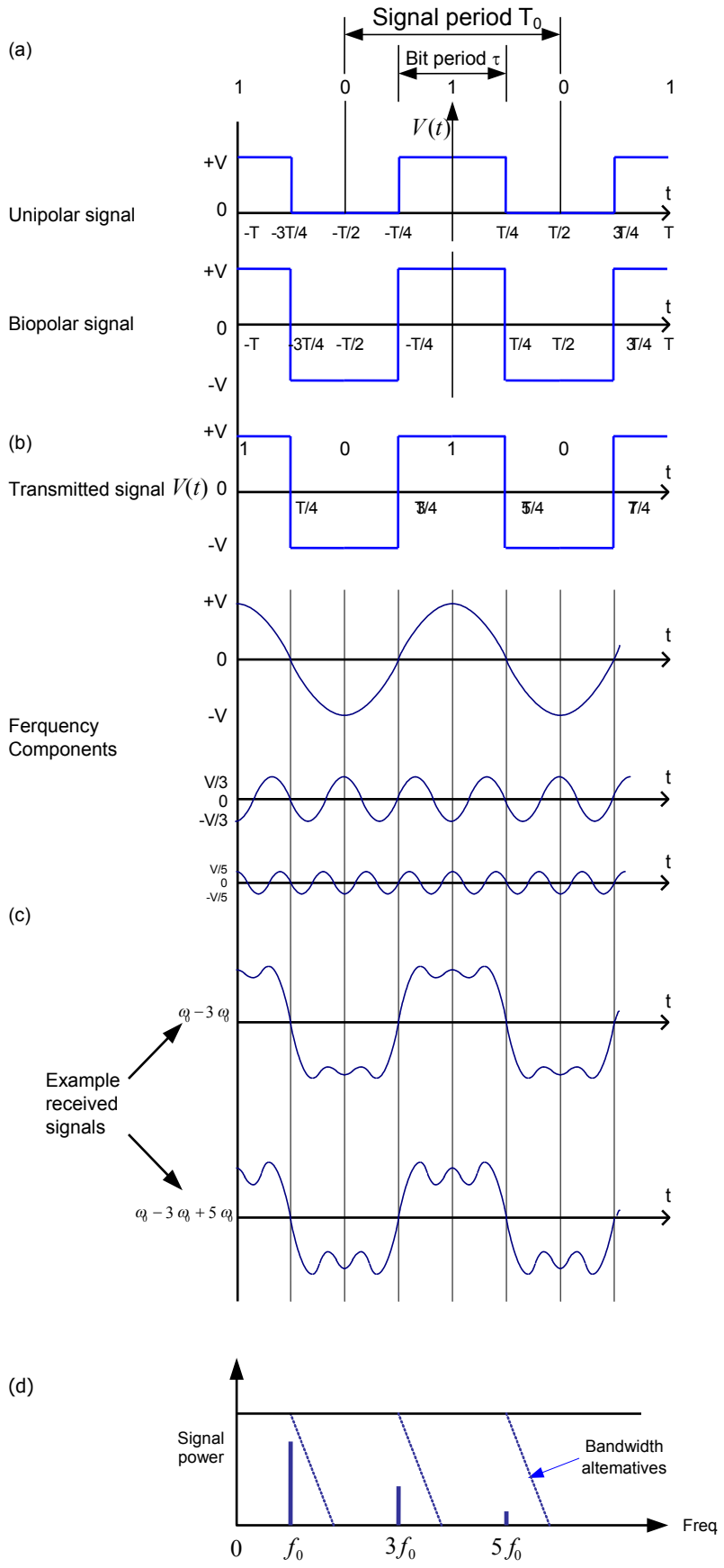
به شکل ۳ نگاه کنید و ببینید که چگونه سه نکته فوق را در آن به تصویر کشیده‌ایم. در زیر سیگنال‌های مربعی با فرکانس f_0، هارمونیک‌های اول و سوم و پنجم سیگنال مربعی دیده می‌شوند که فرکانس آنها به ترتیب f_0 ، $3f_0$ و $5f_0$ بوده و دامنه‌های آنها به ترتیب با نسبت 1، $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{5}$ کاهش یافته و مثبت و منفی بودن یک درمیان ضرایب آنها نیز در شکل دیده می‌شود.



شکل ۳. سری فوریه و هارمونیک یک سیگنال مربعی و مفهوم پهنای باند (a) سه شکل موج بالایی، سیگنال‌های Binary تک قطبی و دو قطبی را نشان می‌دهند. (b) سه هارمونیک سیگنال مربعی فوق . (c) سیگنال دریافتی در اثر عبور تنها ۲ یا ۳ هارمونیک سیگنال ارسالی از کانال (d) پهنای باند کانال در سه حالت مختلف برای عبور هارمونیک (اول) ، (اول و سوم) و (اول و سوم و پنجم)

در قسمت پایین (d) شکل ۳، کانال را به صورت یک فیلتر پایین‌گذر با سه پهنای باند مختلف مشاهده می‌کنید که در حالت اول فقط هارمونیک اول سیگنال را عبور می‌دهد و در حالت دوم، هارمونیک‌های اول و سوم و در حالت آخر، هارمونیک‌های اول و سوم و پنجم را عبور می‌دهد.

در حالت اول که پهنای باند کانال بزرگ‌تر یا مساوی f_0 و کوچک‌تر از $3f_0$ است فقط هارمونیک اول سیگنال از آن عبور می‌کند و در خروجی کانال سیگنال کسینوسی هارمونیک اول ظاهر خواهد شد. در حالت دوم که پهنای باند کانال بزرگ‌تر یا مساوی $3f_0$ و کوچک‌تر از $5f_0$ است فقط هارمونیک‌های اول و سوم سیگنال از آن عبور می‌کند و در خروجی کانال، مجموع سیگنال‌های کسینوسی هارمونیک‌های اول و سوم ظاهر خواهد شد که شکل آن در قسمت (c) شکل ۳ دیده می‌شود. همچنین در حالت سوم که پهنای باند کانال بزرگ‌تر یا مساوی $5f_0$ و کوچک‌تر از $7f_0$ است فقط هارمونیک‌های اول و سوم و پنجم سیگنال از آن عبور می‌کند و در خروجی کانال، مجموع این سه هارمونیک ظاهر خواهد شد که شکل آن نیز در قسمت (c) شکل ۳ دیده می‌شود.

نکته: برای تشخیص سمبول‌های یک سیگنال مبتنی بر سطح در مقصد، از وسط هر سمبول (مثلاً یک بیت) آن نمونه برداشته و سطح آن نمونه را اندازه‌گیری می‌کنند.

نکته: اگر از هارمونیک اول یک سیگنال مربعی و خود سیگنال مربعی با روش فوق نمونه بردارید مشاهده خواهید کرد که برای تشخیص یک سیگنال دیجیتال دو سطحی در مقصد، عبور هارمونیک اول آن کافی است. در واقع از وسط هر بیت یک نمونه‌برداری صورت می‌گیرد و 0 یا 1 بودن آن از هارمونیک f_0 قابل تشخیص است.

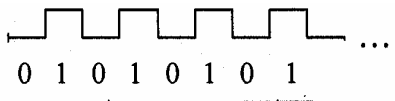
نکته: اگر بخواهیم یک سیگنال مربعی به صورت کاملاً مربعی از یک کانال عبور کند به پهنای باند بی‌نهایت نیاز داریم تا تمامی هارمونیک‌های آن از کانال عبور کنند.

نکته: برای محاسبه حداقل پهنای باند لازم برای عبور یک سیگنال از یک کانال، دو روش وجود دارد:

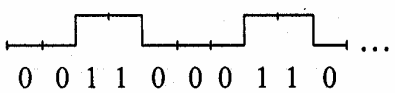
الف) اگر الگوی سیگنال داده شده است، سیگنال را به صورت تکرار آن الگو در نظر بگیرید.

ب) اگر الگوی سیگنال نامشخص است، سیگنال را به صورت ترتیب بدترین حالت (Worst Case Seequence) در نظر بگیرید. چون اگر یک کانال بتواند این سیگنال را عبور دهد، قطعاً سیگنال‌های دیجیتالی تصادفی که نرخ تغییر حالت پایین‌تری دارند را عبور خواهد داد.

مثال ۱: پریود سیگنال .Worst Case Seq مقابل برابر زمان ارسال الگوی 01 است

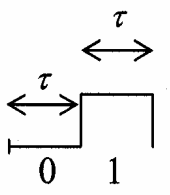


مثال ۲: در شکل مقابل پریود سیگنال برابر زمان ارسال الگوی 00110 است.



مثال ۳: اگر بخواهیم یک سیگنال مربعی دوسطحی را با نرخ 1000bps از یک کانال عبور دهیم، حداقل پهنای باند لازم چقدر است؟

پاسخ: چون الگوی سیگنال داده نشده است، سیگنال را به صورت ترتیب بدترین حالت، یعنی ...010101 در نظر می‌گیریم:



$$\tau = \frac{1}{R}, T_0 = 2\tau$$
$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\tau} = \frac{R}{2} = \frac{1000}{2} = 500Hz$$

مثال ۴: اگر بخواهیم یک سیگنال مربعی دوسطحی به فرم ...0000111100001111 را با نرخ 1000bps از یک کانال عبور دهیم، حداقل پهنای باند لازم چقدر است؟

پاسخ: خود سیگنال متناوب و مربعی (با دوره تناوب 8τ) است:

$$\tau = \frac{1}{R}, T_0 = 8\tau$$
$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{8\tau} = \frac{R}{8} = \frac{1000}{8} = 125Hz$$

مثال ۵: اگر بخواهیم یک سیگنال مربعی دوسطحی به فرم 01010011 را با نرخ 1000bps از یک کانال عبور دهیم، حداقل پهنای باند لازم چقدر است؟

پاسخ: چون الگوی سیگنال داده شده است، سیگنال را به صورت تکرار آن الگو (...0101001101010011) در نظر می‌گیریم:

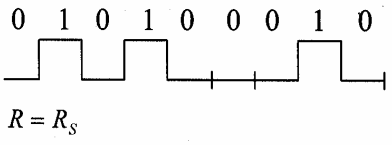
$$\tau = \frac{1}{R}, T_0 = 8\tau$$
$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{8\tau} = \frac{R}{8} = \frac{1000}{8} = 125Hz$$

نرخ بیت و نرخ سیگنال

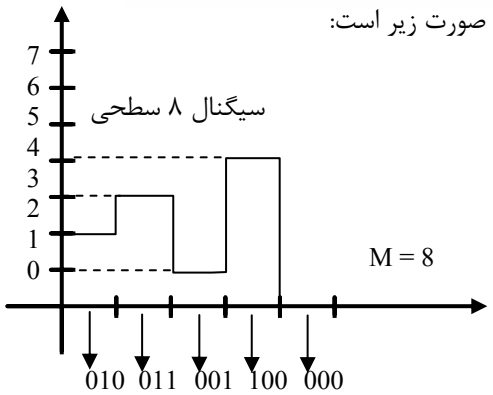
R: نرخ بیت (Bit Rate) : تعداد بیت‌های ارسالی در واحد زمان بر حسب بیت بر ثانیه (bps)

R_s : نرخ سیگنالینگ (Signaling Rate) یا (Baud Rate): تعداد سمبول‌های ارسالی در واحد زمان بر حسب baud یا سمبول بر ثانیه

مثال ۱: برای سیگنال Binary دو سطحی شکل مقابل $R = R_S$ می‌باشد.



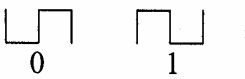
مثال ۲: برای سیگنال چند سطحی (مثلاً ۸ سطحی شکل زیر) رابطه بین R و R_s به صورت زیر است:



$R = R_s \log_2^M$ تعداد سطح سیگنال $\Rightarrow$ مثال ۲ $R = R_s \log_2^8 = 3R_s$

(در مثال ۱: $M = 2 \Leftarrow R = R_s \log_2^2 \Leftarrow R = R_s$)

نکته ۱: حالت‌های خاصی وجود دارند که $R < R_s$ است . مثل سیگنالینگ مقابل که در آن $R = \frac{1}{2}R_s$ می‌باشد:



نکته مهم: کارآیی پهنای باند (Bandwidth Efficiency) عبارت است از نسبت نرخ بیت‌های ارسالی (Bit Rate) به پهنای باند کانال:

$$B = \frac{R}{W}$$

R: نرخ بیت (بر حسب bps)

W: پهنای باند کانال (بر حسب Hz)

B: کارایی پهنای باند (بر حسب $bps\,Hz^{-1}$)

فرمول نایکوئیست (Nyquist)

اگر کانال بدون نویز فرض شود، حداکثر نرخ انتقال داده یا ظرفیت (Capacity) کانال از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$C = 2W\log_2^M$$

C: حداکثر نرخ انتقال داده (R_{max})کانال بدون نویز (bps)

W: پهنای باند کانال (Hz)

M: تعداد سطح سیگنال

نویز (Noise)

$$SNR = 10\log_{10}^{\left(\frac{S}{N}\right)}$$

SNR: Signal to Noise Ratio (به dB)

S: توان متوسط سیگنال (به W)

N: توان تصادفی نویز (به W)

قانون (تئوری) شانون ـ هارتلی <Shanon – Hartley>

برای محاسبه حداکثر نرخ انتقال کانال در حضور نویز دیگر نمی‌توان از رابطه نایکوئیست استفاده کرد. در این حالت از قانون شانون ـ هارتلی به شرح زیر استفاده می‌کنیم:

$$C = W\log_2^{\left(1+\frac{S}{N}\right)}$$

S: توان متوسط سیگنال (به Watt)

N: توان تصادفی نویز (به Watt)

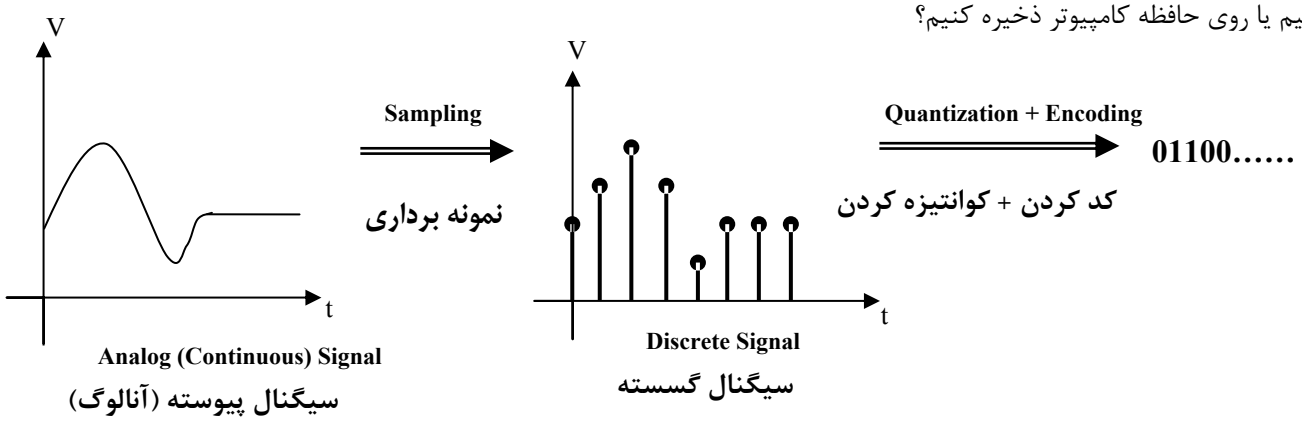
W: پهنای باند کانال (Hz)

C: حداکثر نرخ انتقال داده کانال نویزی (بیت در ثانیه bps)

نکته ۱: دقت کنید $\frac{S}{N}$ برابر نسبت توان‌هاست و بر حسب dB نیست. بنابراین اگر در مسئله SNR را بدهند؛ باید $\frac{S}{N}$ محاسبه شود.

نمونه‌برداری (Sampling)

یک سیگنال آنالوگ مفروض است (مثلاً صدای دریافتی از میکروفن)؛ حال مسئله این است که چگونه آن را از یک خط دیجیتال عبور دهیم یا روی حافظه کامپیوتر ذخیره کنیم؟



شکل ۴. نمونه‌برداری و کوانتیزه کردن یک سیگنال آنالوگ

نمونه‌برداری: برداشتن نمونه‌هایی از سیگنال پیوسته در فواصل زمانی مساوی (پریودیک)

کوانتیزه کردن یا چندی کردن (Quantization): فرض کنید هر نمونه باید به ۳ بیت کد شود. بنابراین باید دامنه نمونه که یک عدد حقیقی است از مجموعه محدود (8 تایی) و گسسته‌ای از دامنه‌ها باشد و اگر نیست با تقریب (Round یا گرد کردن) به این مجموعه گسسته نگاشت شود.

تئوری نایکوئیست (Nyquist)

اگر بالاترین فرکانس یک سیگنال آنالوگ برابر f_h باشد، فرکانس نمونه‌برداری باید حداقل برابر $2f_h$ باشد.

نکته: اگر فرکانس نمونه‌برداری کمتر از $2f_h$ باشد $(f_s < 2f_h)$ موجب روی هم افتادن مولفه‌های طیفی و اختلاط فرکانسی <Aliasing> می‌شود. از نظر تئوری نایکوئیست، نمونه‌برداری با فرکانس‌های بالاتر از $2f_h$ هیچ برتری بر فرکانس $2f_h$ ندارد و بیهوده است.