Subject:
Year. Month. Date. ( )

معادلات خطی غیرهمگن :

روش اول : تغییر پارامتر

ابتدا معادله خطی غیرهمگن را همگن می‌کنیم یعنی $q(x)=0$ و سپس حل می‌کنیم و بعد از جواب بدست آمده مشتق می‌گیریم (به طوری که c را تابعی [و نه] عدد ثابت در نظر می‌گیریم) سپس y' و y بدست آمده را در معادله اولیه قرار می‌دهیم. در نهایت c بدست آمده را در y که بدست آوردیم قرار می‌دهیم.

مثال : $y' - y\,tgx = \cos x \Rightarrow y' - y\,tgx = 0$

$$\Rightarrow y = c e^{-\int -tgx\,dx} = c e^{Ln|\cos x|^{-1}} = c|\cos x|^{-1} = c \sec x$$

$$\Rightarrow y' = c' \sec x + c \sec x \cdot tgx$$ جایگذاری می‌کنیم

$$c' \sec x + c \sec x\, tgx - c \sec x\, tgx = \cos x$$

$$c' \frac{1}{\cos x} = \cos x \Rightarrow \frac{dc}{dx} = \cos^2 x \Rightarrow \int dc = \int \cos^2 x\,dx$$

$$\Rightarrow c = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}\right) dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x\right)\sec x}$$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

مثال: $\boxed{y' - y\,tgx} = \underset{q(x)}{\cos x}$, $p(x)$

$$y = e^{-\int -tgx\,dx}\left[\int \cos x\, e^{\int -tgx\,dx}\, dx + c\right]$$

$$y = \underbrace{e^{-\ln|\cos x|}}_{e^{\ln|\cos x|^{-1}}}\left[\int \cos x\, e^{\ln|\cos x|}\, dx + c\right]$$

جواب عمومی:

$$\Rightarrow y = \frac{1}{\cos x}\left[\int \underbrace{\cos^2 x}_{\frac{1+\cos 2x}{2}}\, dx + c\right] = \frac{1}{\cos x}\left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c\right]$$

معادلات برنولی:

$$y' + p(x)\, y = q(x)\, y^n$$

$$\xrightarrow{\times y^{-n}} y' y^{-n} + p(x)\, y^{1-n} = q(x) \xrightarrow[\text{مشتق نسبت } x]{y^{1-n} = u} (1-n)\, y' y^{-n} = u'$$

$$\frac{1}{1-n}u' + p(x)\, u = q(x) \Rightarrow u' + (1-n)\, p(x)\, u = (1-n)\, q(x)$$

مثال: $y' + \frac{2}{x} y = 2\sqrt{y}\, x$ → $y^{\left(\frac{1}{2}\right)} \Rightarrow n = \frac{1}{2}$

$$\xrightarrow{\times y^{-\frac{1}{2}}} y^{-\frac{1}{2}} y' + \frac{2}{x} y^{\frac{1}{2}} = 2x \quad , \quad y^{\frac{1}{2}} = u \Rightarrow \frac{1}{2} y' y^{-\frac{1}{2}} = u' \Rightarrow y' y^{-\frac{1}{2}} = 2u'$$

$$\Rightarrow 2u' + \frac{2}{x} u = 2x \Rightarrow u' + \frac{1}{x} u = x \Rightarrow \begin{cases} p(x) = \frac{1}{x} \\ q(x) = x \end{cases}$$

$$u = e^{-\int \frac{1}{x} dx}\left[\int x\, e^{\int \frac{1}{x} dx}\, dx + c\right] = e^{\ln|x|^{-1}}\left[\int x\, e^{\ln|x|}\, dx + c\right] = \frac{1}{x}\left(\frac{x^3}{3} + c\right)$$

$$\Rightarrow u = \frac{x^2}{3} + \frac{c}{x} \xrightarrow{u = y^{\frac{1}{2}}} y^{\frac{1}{2}} = \frac{x^2}{3} + \frac{c}{x} \Rightarrow y = \left(\frac{x}{3} + \frac{c}{x}\right)^2$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

حل: $y' - \frac{y}{x} = x \Rightarrow y' - \frac{y}{x} = 0 \Rightarrow y = cx \Leftarrow$ قبل تر همگن آن را حل کردیم

$$\xrightarrow{\text{مشتق برحسب } x} y' = c'x + c \xrightarrow{\text{جایگذاری}} c'x + c - \frac{cx}{x} = x$$

$$\Rightarrow c'x = x \Rightarrow c' = 1 \Rightarrow c = x + c_1 \rightarrow$$ c بدست آمده را در جواب معادله همگن قرار میدهیم

$$\boxed{y = (x + c_1)x}$$

توضیح:

$$y' + P(x)y = \varphi(x)$$

جواب عمومی: $y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int \varphi(x) e^{\int P(x)dx} dx + C\right]$

جواب عمومی خطی غیرهمگن مرتبه اول