Subject : معادلات دیفرانسیل

Year: 89 Month. 12 Date. 5

ABADANOMRAN

بسم الله الرحمن الرحیم

جزوه درس معادلات دیفرانسیل - استاد مشکور

کتب مرجع: معادلات دیفرانسیل - علی اصغر کرایه چیان

معادلات دیفرانسیل - مسعود نیکوکار

معادلات دیفرانسیل - سیمونز

فصل اول: معادلات دیفرانسیل مرتبه اول.

(تعلیل پذیر - همگن - کامل - عامل انتگرال ساز - خطی - کاهش مرتبه -)

فصل دوم: معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم.

(ضرایب ثابت - روش V - ضرایب نامعین - روش تغییر پارامتر)

فصل سوم: تبدیلات لاپلاس.

(معرفی و قواعد تبدیلات لاپلاس - کاربرد لاپلاس در معادلات)

فصل چهارم: حل معادلات به روش سری ها.

ABADANOMRAN

WWW.ABADANOMRAN.COM

Subject : معادلات دیفرانسیل

Year: 89 Month. 12 Date. 5

ABADANOMRAN

تعریف: هر معادله شامل x، y و مشتقات y نسبت به x یک معادله دیفرانسیل می گوییم.

مثال: $x^2y' + \frac{2x}{y} = \ln x$ ---- مرتبه دوم

$y'' + 5y' + 6y = 0$ ---- مرتبه دوم

هدف: یافتن y (که یک تابع است) می باشد.

روش: هستیم که خود و مشتقات y در معادله وجود دارند

به عنوان مثال معادله ی دیفرانسیل $y'' + 5y' + 6y = 0$ را در نظر بگیرید: $y = e^{-2x}$

یکی دیگر از جوابهای این معادله $y = e^{-3x}$ می باشد.

ABADANOMRAN

به این جوابها، جواب خصوصی معادله می گوییم در حالی که هدف از حل یک معادله دیفرانسیل یافتن تمامی جوابهای معادله می باشد که آنها را به صورت یک دسته جواب به عنوان جواب عمومی می گوییم.

مثلاً در مورد مثال بالا جواب عمومی به صورت اولر می باشد: $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-3x}$

معادلات مرتبه اول

۱- تفکیک پذیر یا جوابی پذیر: هر معادله دیفرانسیل که بتوان آن را ساده شده به صورت $f(x)dx = g(y)dy$ نوشت شود را تفکیک پذیر می گوییم. برای حل این معادله کافی است از طرفین آن انتگرال بگیریم.

WWW.ABADANOMRAN.COM

ABADANOMRAN

مثال) $(x^2-1)yy' = 2x \rightarrow (x^2-1)y\frac{dy}{dx} = 2x$

$\rightarrow (x^2-1)ydy = 2xdx$

$\rightarrow ydy = \frac{2x-dx}{(x^2-1)} \rightarrow \int ydy = \int \frac{2x-dx}{(x^2-1)}$

مشتق صفر در صورت

$\Rightarrow \frac{y^2}{2} = \ln(x^2-1) + C$

مثال) $y' = e^{x+y} \rightarrow y' = e^x \cdot e^y \rightarrow dy/dx = e^x e^y \rightarrow dy = e^x e^y dx$

$\int dy/e^y = \int e^x dx \rightarrow -e^{-y} = e^x + C \rightarrow -\frac{1}{e^y} = e^x + C$

مثال) $2x(y+1)dx + (x^2-1)dy = 0$

$\rightarrow (x^2-1)dy = -2x(y+1)dx \rightarrow \frac{(x^2-1)dy}{(x^2-1)(y+1)} = \frac{-2x(y+1)dx}{(x^2-1)(y+1)}$

$\rightarrow \frac{dy}{y+1} = \frac{-2xdx}{x^2-1}$

$\rightarrow \int \frac{dy}{y+1} = \int \frac{-2xdx}{x^2-1} \rightarrow \ln y+1 = -\ln(x^2-1) + C$

$\downarrow \ln(y+1) = \ln \frac{1}{(x^2-1)} + \ln C$

$\downarrow \ln(y+1) = \ln \frac{C}{x^2-1} \rightarrow y+C = \frac{C}{x^2-1} \rightarrow y = \frac{C}{x^2-1} - 1$

WWW.ABADANOMRAN.COM

ABADANOMRAN

مثال $y' = \sin^2(x-y+1)$

← نکته: این معادله جوابی نزدیک داشت با تغییر متغیر مناسب می‌توان آن را حل کرد.

$z = x-y+1 \rightarrow z' = 1-y' \rightarrow y' = 1-z'$

معادله $\rightarrow 1-z' = \sin^2 z \rightarrow 1-\frac{dz}{dx} = \sin^2 z$

$\rightarrow -\frac{dz}{dx} = -(1+\sin^2)z \rightarrow -\frac{dz}{dx} = -\cos^2 z \rightarrow \frac{dz}{\cos^2 z} = dx$

$\int \tan z = x+C \rightarrow \tan(x-y+1) = x+C$ جواب عمومی

$\frac{1}{\sin^2} = -\cot$

$\frac{1}{\cos^2} = \tan$

پایان جلسه اول

ABADANOMRAN

WWW.ABADANOMRAN.COM