معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

فرم کلی یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول به صورت $F(x, y, y') = 0$ می‌باشد، که در وضعیت‌هایی خاص قابل حل است.
برخی مواردی که ممکن است به عنوان یک تست مورد سؤال قرار گیرد را مرور می‌کنیم.

۱) معادلات دیفرانسیل مرتبه اول جدائی‌پذیر

هرگاه بتوانیم یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول را در قالب $A(x)\,dx = B(y)\,dy$ بنویسیم، معادله را از نوع جدایی‌پذیر گفته و با انتگرال‌گیری از طرفین این رابطه جواب عمومی به‌دست می‌آید.

توجه:در معادلات دیفرانسیلی به فرم $y' = f(ax + by + c)$ با جانشینی $u(x) = ax + by + c$ که نتیجه می‌دهد $u' = a + by'$، به یک معادله جدایی‌پذیر برای تابع $u(x)$ خواهیم رسید.

مثال : جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را پیدا کنید:

۱) $y' = \sqrt{4 + x + 4y + xy}$

$$y' = \sqrt{4 + x + y(4 + x)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sqrt{(4 + x)(1 + y)}$$

$$dy\,.\,(1 + y)^{-\frac{1}{2}} = (4 + x)^{\frac{1}{2}}\,dx \Rightarrow \xrightarrow{\int} 2(1 + y)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}(4 + x)^{\frac{3}{2}} + C$$

۲) $(x + y)^2\,y' = 1$

مطابق توجه گفته شده با فرض: $u(x) = x + y$ که نتیجه می‌دهد:

$$u' = 1 + y'$$

می‌توان نوشت:

$$u^2(u' - 1) = 1 \to u' - 1 = \frac{1}{u^2}$$

$$u' - 1 = \frac{1}{u^2} \to \frac{du}{dx} = \frac{1}{u^2} + 1 \to \frac{du}{dx} = \frac{1 + u^2}{u^2} \to \frac{u^2 + 1 - 1}{1 + u^2}\,du = dx \to$$

$$\left(1 - \frac{1}{1 + u^2}\right)du = dx \xrightarrow{\int} u - \tan^{-1}u = x + c \xrightarrow{u = x + y} (x + y) - \tan^{-1}(x + y) = x + c$$

۲) معادلات دیفرانسیل مرتبه اول با توابع همگن

یادآوری:

همان‌طوری‌که می‌دانیم تابع $f(x, y)$ را همگن از درجه α می‌گویند هرگاه $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{\alpha} f(x, y)$

در معادله دیفرانسیل $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$ هرگاه توابع P و Q توابعی همگن بادرجه همگنی یکسان باشند، معادله را از نوع مرتبه اول با توابع همگن گفته و با جانشینی $y = x\,u(x)$ که نتیجه می‌دهد $y' = u(x) + x\,u'(x)$، به یک معادله جدایی‌پذیر برای تابع $u(x)$ خواهیم رسید.

توجه:در معادلات دیفرانسیل $y' = \dfrac{ax + by + c}{mx + ny + k}$ اگر دو خط $mx + ny + k = 0$ و $ax + by + c = 0$ موازی باشند با تغییر تابع $u(x) = ax + by + c$ معادله به نوع جدایی‌پذیر تبدیل می‌شود و اگر دو خط مذکور همدیگر را در نقطه (x_0 , y_0) قطع کنند با جانشینی‌های $y = Y + y_0$ و $x = X + x_0$ معادله به فرم توابع همگن تبدیل می‌شود.

مثال : جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را پیدا کنید.

$$\left(2x^2 + y^2\right) dx + xy\, dy = 0$$

حل :

$2x^2 + y^2$ و xy هر دو همگن از درجه $\alpha = 2$ هستند لذا با فرض:

$$y = x\, u(x) \rightarrow y' = u + xu'$$

و نوشتن معادله اصلی به صورت $\left(2x^2 + y^2\right) + xy\dfrac{dy}{dx} = 0$ داریم:

$$\left(2x^2 + x^2u^2\right) + x(xu)(u + xu') = 0 \longrightarrow$$
$$2 + u^2 + u^2 + xuu' = 0 \rightarrow xu\frac{du}{dx} = -2\left(1 + u^2\right) \rightarrow$$

$$\frac{u\, du}{1 + u^2} = -2\frac{dx}{x} \xrightarrow{\int} \frac{1}{2}\ln\left(1 + u^2\right) = -2\ln x + C$$

$$\xrightarrow{\ln K = C} \ln\sqrt{\left(1 + u^2\right)} = \ln\frac{K}{x^2} \rightarrow \sqrt{1 + u^2} = \frac{K}{x^2} \xrightarrow{u = \frac{y}{x}} \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{K}{x^2}$$

۳) معادلات دیفرانسیل کامل

معادله دیفرانسیل $P(x , y)\, dx + Q(x , y)\, dy = 0$ را کامل می‌گویند هرگاه $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ باشد. در چنین شرایطی جواب عمومی معادله به صورت $u(x , y) = c$ خواهد بود که تابع u را باید از حل دستگاه $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = P(x , y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x , y) \end{cases}$ به‌دست آورد.

مثال : جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y' = \dfrac{1 - 2x - 3y}{4y + 3x}$ چه خانواده‌ای از مقاطع مخروطی را نشان می‌دهد؟

۱) دایره‌ها
۲) سهمی‌ها
۳) بیضی‌ها
۴) هذلولی‌ها

حل : داریم:

$$\overbrace{(2x + 3y - 1)}^{P}\, dx + \overbrace{(4y + 3x)}^{Q}\, dy = 0$$

ملاحظه می‌شود:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=3$$

پس معادله از نوع کامل است.

برای یافتن u می‌نویسیم:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x+3y-1\xrightarrow{\int} u=x^2+3xy-x+A(y)\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=4y+3x\xrightarrow{\int} u=2y^2+3xy+B(y)\end{cases}\quad\rightarrow\quad u=x^2+3xy-x+2y^2$$

در نهایت جواب عمومی چنین است:

$$u(x,y)=k\rightarrow x^2+3xy-x+2y^2=k$$

که یک خانواده هذلولی است زیرا:

$$A=1\quad,\quad B=3\quad,\quad C=2$$

$$\Delta=B^2-4AC=9-8>0$$

عامل انتگرال‌ساز

اگر معادله دیفرانسیل $P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$ کامل نباشد، ممکن است بتوانیم تابعی مانند $\mu(x,y)$ به‌گونه‌ای بیابیم که با ضرب آن در معادله فوق، حاصل یک معادله کامل باشد یعنی $P\mu\,dx+Q\mu\,dy=0$ کامل باشد. (این می‌طلبد که $\dfrac{\partial(P\mu)}{\partial y}=\dfrac{\partial(Q\mu)}{\partial x}$ باشد.

در این شرایط $\mu(x,y)$ را یک عامل انتگرال‌ساز معادله دیفرانسیل مورد نظر می‌گوئیم (این تابع یکتا نمی‌باشد).

برای یافتن عامل انتگرال‌ساز ممکن است یکی از بحث‌های زیر مفید باشد:

الف) گاهی در گزینه‌های پیشنهادی یک ساختار مشترک دیده می‌شود، در این وضعیت کافی است فرم کلی این ساختار مشترک را در نظر گرفته و با ضرب آن در معادله دیفرانسیل مورد نظر، شرط کامل شدن معادله حاصله را نوشته و تکلیف μ را معلوم کنیم.

ب) اگر $\dfrac{1}{Q}\left(\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)=h(x)$ آنگاه $\mu(x)=e^{\int h(x)\,dx}$

اگر $\dfrac{1}{P}\left(\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)=h(y)$ آنگاه $\mu(y)=e^{-\int h(y)\,dy}$

مثال : یک عامل انتگرال‌ساز، برای معادله دیفرانسیل $ydx+\left(xLny+y^6\right)dy=0$ پیدا کنید.

حل :

$$\left.\begin{array}{l}P(x,y)=y\ \Rightarrow\ \dfrac{\partial P}{\partial y}=1\\ Q(x,y)=\left(xLny+y^6\right)\ \Rightarrow\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}=Lny\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\frac{1-Lny}{y}=\frac{1}{y}-\frac{Lny}{y}=h(y)$$

پس می‌توان گفت:

$$\mu(y)=e^{-\int h(y)\,dy}=e^{\int\left(\frac{Lny}{y}-\frac{1}{y}\right)dy}=e^{-Lny+\frac{(Lny)^2}{2}}\ \Rightarrow\ \mu(y)=\frac{e^{\frac{(Lny)^2}{2}}}{y}$$