ضرب سه برداری { ضرب سه‌گانه عددی / ضرب سه‌گانه برداری

اسکالر

ضرب سه‌گانه عددی: $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})$

حجم متوازی السطوح — معادل است با حجم متوازی

جابجایی دورانی

ضرب سه‌گانه برداری: $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$ — قاعده BAC-CAB (مهم)

2-2 دستگاه مختصات منحنی الخط تعمیم یافته

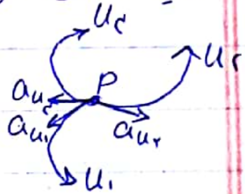
برای نسبت دادن یک کمیت برداری یا نرده‌ای در یک نقطه در فضای سه بعدی باید بتوان آن نقطه را بطور یکتا مشخص نمود.

$U_1 = C_1$

$U_2 = C_2$

$U_3 = C_3$

سه سطح $P(u_1, u_2, u_3)$ — متغیرهای مختصات

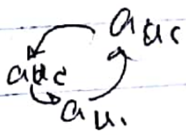


خواص بردارهای پایه $\vec{a}_{u_1}, \vec{a}_{u_2}, \vec{a}_{u_3}$ (مماس بر فصل مشترک)

- اندازه واحد دارند $|a_{u_1}| = |a_{u_2}| = |a_{u_3}| = 1$
- در جهت افزایش تغییرند (مثبت)

در جهت تغییر به ما کمک می‌کند

- در دستگاه مختصات متعامد $\vec{a}_i\cdot\vec{a}_j = 0 \quad , i\neq j$
- دستگاه مختصات متعامد راستگرد



$\vec{a}_{u_1}\times\vec{a}_{u_2} = \vec{a}_{u_3}$

$\vec{a}_{u_2}\times\vec{a}_{u_3} = \vec{a}_{u_1}$

$a_{u_3}\times a_{u_1} = \vec{a}_{u_2}$

ضریب متریک:

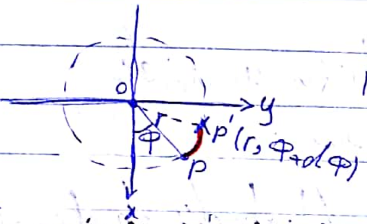
$P(u_1,u_2,u_3)$

$P' = (u_1+du_1, u_2, u_3)$

$\vec{dl} = \vec{dl_1} + \vec{dl_2} + \vec{dl_3}$

جزء طول ← $\boxed{dl_1 = \underbrace{h_1(u_1,u_2,u_3)}_{\text{ضریب متریک}}\, du_1}$

$\vec{dl} = h_1(u_1,u_2,u_3)\,du_1\,\vec{a_{u_1}} + h_2(u_1,u_2,u_3)\,du_2\,\vec{a_{u_2}} + h_3(u_1,u_2,u_3)\,du_3\,\vec{a_{u_3}}$

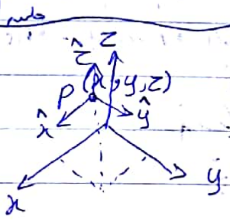


$P(x_1,y_1) = P(r,\varphi)$

$dl_2 = h_2(u_1,u_2)\,du_2 = \underbrace{h(r,\varphi)}_{r}\,d\varphi = r\,d\varphi$

$u_1 = r \quad u_2 = \varphi \quad dl_1 = 1\,du_1 = 1\,dr$ خودش از جنس طوله

مثال: دستگاه مختصات دکارتی



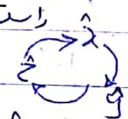
$u_1 = x \quad \vec{a_{u_1}} = \hat{x}$

$u_2 = y \quad \vec{a_{u_2}} = \hat{y}$

$u_3 = z \quad \vec{a_{u_3}} = \hat{z}$

مختصات نقطه — بردارهای پایه ↓ اندازه برابر یک، در جهت افزایش

راست گرد



$\hat{x}\times\hat{y} = \hat{z}$

$\hat{y}\times\hat{z} = \hat{x}$

$\hat{z}\times\hat{x} = \hat{y}$

جزء طول

$dl_i = h_i\,du_i \qquad h_1 = h_2 = h_3 = 1$

$du_1 = dx$

$du_2 = dy$

$du_3 = dz$

$\vec{dl} = dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z}$

$|\vec{dl}| = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$

$\vec{ds} = ds\,\vec{a_n}$ نرمال بر سطح — جزء سطح

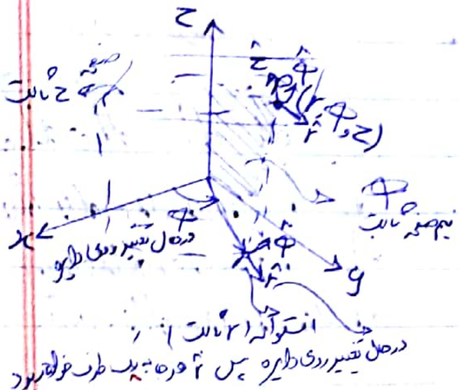
$\vec{ds_x} = dydz\,\hat{x}$

$ds_x = dydz \qquad ds_y = dxdz \qquad ds_z = dxdy$

$dV = dxdydz$ جزء حجم

دستگاه مختصات ما متعامد راستگرد است.

مثال ۵ دستگاه مختصات استوانه‌ای



بردارهای r̂ و φ̂ تغییر می‌کنند ولی z ثابت است به‌ازای نقطه

$P(r, \varphi, z)$

$u_1 = r$ $a_{u_1} = \hat{r}$

$u_2 = \varphi$ $a_{u_2} = \hat{\varphi}$ متغیر   بردارهای یکه

$u_3 = z$ $a_{u_3} = \hat{z}$

$\hat{r} \times \hat{\varphi} = \hat{z}$

$\hat{\varphi} \times \hat{z} = \hat{r}$ اگر خودش رو حساب کنی

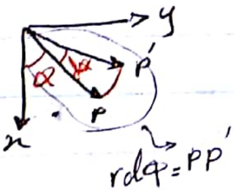
$\hat{z} \times \hat{r} = \hat{\varphi}$ طول بازه ضریب است مثل ۲

$$dl_i = \underbrace{h_i(u_1, u_2, u_3)}_{\text{ضریب متریک}}\, du_i$$

$dl_1 = h_1 du_1 = h_1 dr \rightarrow h_1 = 1$

$dl_3 = h_3 du_3 = h_3 dz \rightarrow h_3 = 1$

$dl_2 = h_2 du_2 = h_2 d\varphi \rightarrow h_2 = r$



$rd\varphi = PP'$

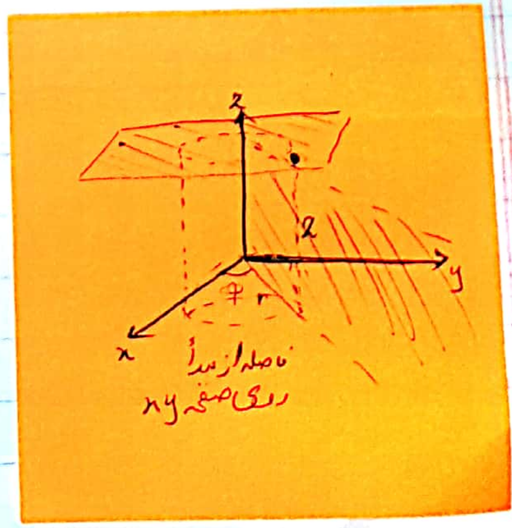
$$\begin{cases} dl_1 = dr\,\hat{r} \\ dl_2 = r\,d\varphi\,\hat{\varphi} \\ dl_3 = dz\,\hat{z} \end{cases}$$

جزء طول
$$\begin{cases} \vec{dl} = \vec{dl_1} + \vec{dl_2} + \vec{dl_3} \\ \vec{dl} \cdot \vec{dl} = |\vec{dl}||\vec{dl}| = |\vec{dl}|^2 \\ |\vec{dl}| = \sqrt{dr^2 + (rd\varphi)^2 + dz^2} \end{cases}$$

جزء سطح
$$\begin{cases} ds = ds\,\vec{a_n} \\ ds_r = r\,d\varphi\,dz = dl_2 \cdot dl_3 \\ ds_\varphi = dr\,dz \quad dl_1 \cdot dl_3 \\ ds_z = r\,dr\,d\varphi \quad dl_1 \cdot dl_2 \end{cases}$$

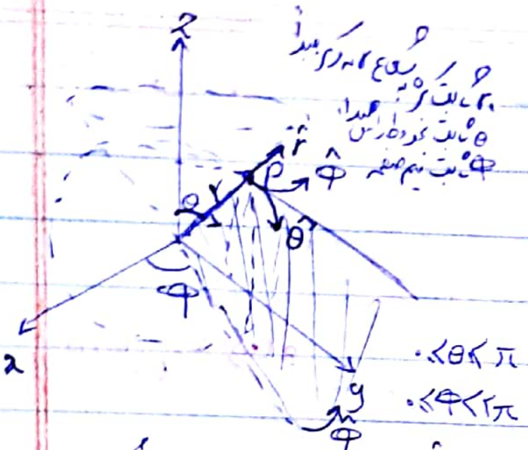
جزء حجم $dv = r\,dr\,d\varphi\,dz$

$dl_1 \cdot dl_2 \cdot dl_3$



میانترم ۲/۱۹

r (فاصله نقطه P تا مرکز مختصات)



$0 \leq \theta \leq \pi$

$0 \leq \varphi < 2\pi$

$\hat{\varphi}$ ← در صفحه xy در جهت افزایش φ

مثال ۵ در دستگاه مختصات کروی

$u_1 = r \qquad a_{u_1} = \hat{r}$

$u_2 = \theta \qquad a_{u_2} = \hat{\theta}$

$u_3 = \varphi \qquad a_{u_3} = \hat{\varphi}$

بردارهای یکه متغیر

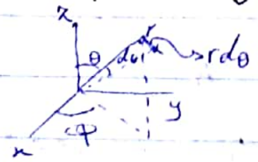
$\hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{\varphi}$

جزء طول

$$\begin{cases} \vec{dl_1} = h_1 du_1 = dr\,\hat{r} \\ \vec{dl_2} = h_2 d\theta\,\hat{\theta} = r\,d\theta\,\hat{\theta} \\ \vec{dl_3} = h_3 d\varphi\,\hat{\varphi} = r\sin\theta\, d\varphi\,\hat{\varphi} \end{cases}$$

جزء سطح

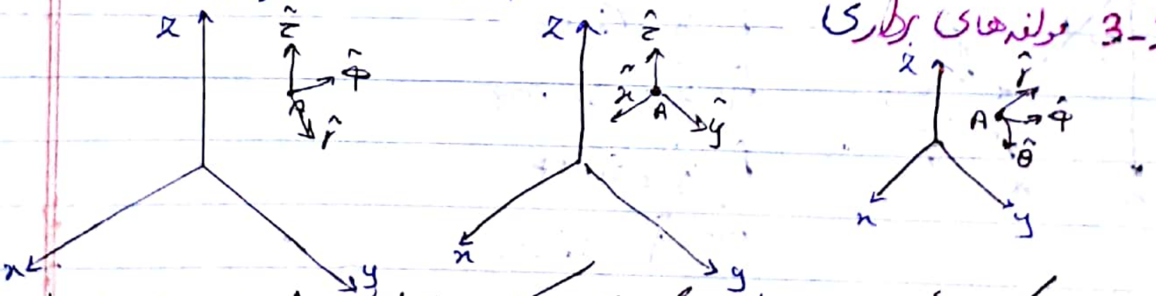
$$\begin{cases} ds_r = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi & dl_2\, dl_3 \\ ds_\theta = r\sin\theta\, dr\, d\varphi & dl_1\, dl_3 \\ ds_\varphi = r\, dr\, d\theta & dl_1\, dl_2 \end{cases}$$



جزء حجم $dV = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr$

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^2\, dr\, \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

3-2 مولفه‌های برداری

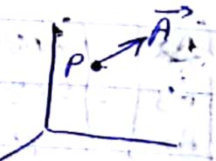


اگر برداری که مبدأ آن در نقطه A باشد را تصور کنیم می‌توان آنرا به ۳ مولفه در امتداد بردارهای واحد تجزیه کرد.

$$\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z} \rightarrow |A| = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2 + (A_z)^2}$$

$$\vec{A} = A_r\hat{r} + A_\varphi\hat{\varphi} + A_z\hat{z}$$

$$\vec{A} = A_r\hat{r} + A_\theta\hat{\theta} + A_\varphi\hat{\varphi}$$



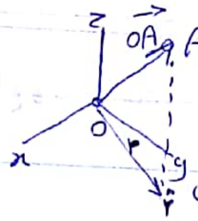
$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\hat{x} + (A_y + B_y)\hat{y} + (A_z + B_z)\hat{z}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_r B_r + A_\varphi B_\varphi + A_z B_z$$

باید هم زاویه باشند وگرنه به مختصات دکارتی می‌بریم

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\hat{r} & \hat{\varphi} & \hat{z}\\ A_r & A_\varphi & A_z\\ B_r & B_\varphi & B_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\hat{r} & \hat{\theta} & \hat{\varphi}\\ A_r & A_\theta & A_\varphi\\ B_r & B_\theta & B_\varphi\end{vmatrix}$$



• بردار مکان:

$$\vec{OA}=x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}$$

استوانه‌ای $\vec{OA}=r\hat{r}+z\hat{z}$

کروی $\vec{OA}=r\hat{r}$ — برای مشخص $\hat{r}$ غیرمستقیم با θ و φ سروکار داریم.

تبدیل بردارها:

$A_r(r,\varphi,z)$ $A_\varphi(r,\varphi,z)$ $A_z(r,\varphi,z)$

معلوم $\vec{A}=A_r\hat{r}+A_\varphi\hat{\varphi}+A_z\hat{z}$

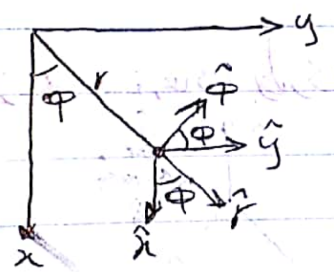
مجهول $\vec{A}=A_x\hat{x}+A_y\hat{y}+A_z\hat{z}$

$\boxed{\text{برای پیدا کردن تصویر یک بردار روی بردار دیگر ضرب داخلی!}}$

$$A_x=\vec{A}\cdot\hat{x}=\underbrace{A_r\hat{r}\cdot\hat{x}+A_\varphi\hat{\varphi}\cdot\hat{x}}_{A_r(\cos\varphi)+A_\varphi(-\sin\varphi)}+\cancel{A_z\hat{z}\cdot\hat{x}}$$ چون برهم عمود هستند

$$A_y=\vec{A}\cdot\hat{y}=\underbrace{A_r\hat{r}\cdot\hat{y}+A_\varphi\hat{\varphi}\cdot\hat{y}}_{A_r(\sin\varphi)+A_\varphi(\cos\varphi)}+\cancel{A_z\hat{z}\cdot\hat{y}}$$

$$A_z=\vec{A}\cdot\hat{z}=\cancel{A_r\hat{r}\cdot\hat{z}}+\cancel{A_\varphi\hat{\varphi}\cdot\hat{z}}+A_z\hat{z}\cdot\hat{z}=A_z$$



Cos بین (اندازه φ)(اندازه r) = برابر یک اند

$$\hat{r}\cdot\hat{x}=\cos\varphi$$
$$\hat{\varphi}\cdot\hat{x}=-\sin\varphi$$
$$\hat{r}\cdot\hat{y}=\sin\varphi$$
$$\hat{\varphi}\cdot\hat{y}=\cos\varphi$$

$$\begin{bmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_r\\A_\varphi\\A_z\end{bmatrix}$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\quad \varphi=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right),\quad z=z$$

استوانه‌ای به دکارتی

تمرین

کروی به دکارتی

$$\begin{bmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi\\ \cos\theta & -\sin\theta & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_r\\A_\theta\\A_\varphi\end{bmatrix}$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\quad \theta=\cos^{-1}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \varphi=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

دکارتی به کروی

$$\begin{cases}x=r\sin\theta\cos\varphi\\ y=r\sin\theta\sin\varphi\\ z=r\cos\theta\end{cases}$$

مثال: در دستگاه کروی $\vec{A} = \frac{8}{r^2}\hat{r}$

الف) $|\vec{A}|$ ، A_x در نقطه $M:(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, 8)$

@ elec971

سه‌شنبه ۱۴۰۲/۱۱/۱۰ ساعت ۱۴/۱۵

ب) ضرب $\vec{A}\cdot B$ در نقطه M که $\vec{B} = \hat{x} - 2\hat{y} + 6\hat{z}$

4-2 میدان های اسکالر و برداری

میدان اسکالر: $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\Phi} \mathbb{R}$

$$(u_1, u_2, u_3) \xrightarrow{\Phi} V = \Phi(u_1, u_2, u_3) \in R$$

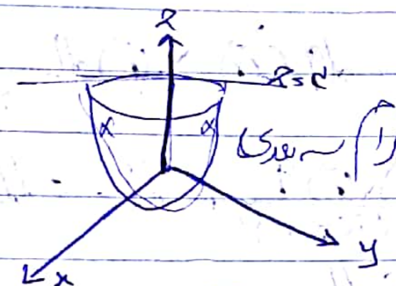
نمایش میدان های اسکالر:

① دیاگرام سه بعدی

$V = \Phi(x,y,z)$

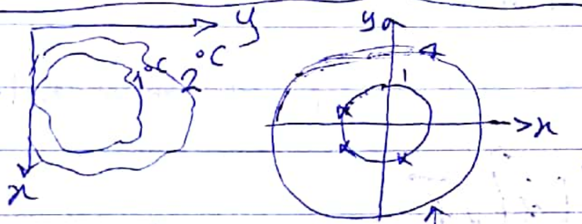
$z = c$ ثابت

$\Phi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z$



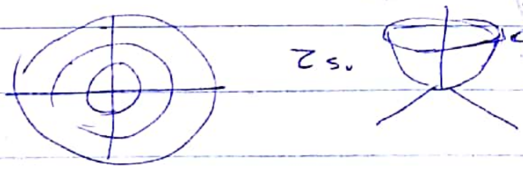
② کانتور

$$\begin{cases} \Phi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z \\ z = 0 \\ \Phi(x,y,0) = x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$



مثال: $\Phi = f(x,y) + z = x^2 + y^2 + z$

$z = 0$ ، $\Phi = f(x,y,0)$



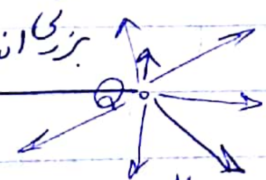
میدان برداری: $(u_1, u_2, u_3) \xrightarrow{F} \vec{E} = \vec{F}(u_1, u_2, u_3)$

$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

نمایش میدان های برداری:

① با استفاده از پیکان

بزرگی اندازه پیکان مشکل قوی بودن میدان است



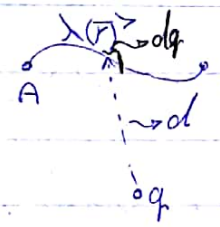
② خطوط نیرو streamline

جاهایی که خطوط فشرده هستند میدان قوی تر است و بالعکس

جهت با نیم خط های مماس بر خطوط نمایش داده می شود

انتگرال گیری برداری : خطی / سطحی / حجمی

مثال : نیروی الکتریکی وارد بر توزیع بار خطی با چگالی λ ناشی از بار نقطه‌ای q را بیابید

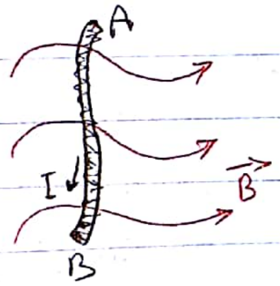


$$\vec{dF} = dq\,\vec{E}(\vec{r}) = \lambda(\vec{r})\,dl\,\frac{q}{4\pi\epsilon|\vec{r}|^2}\left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\right)\hat{r}$$

$$\vec{dF} = \frac{\lambda(\vec{r})\,q}{4\pi\epsilon|\vec{r}|^3}\,\vec{r}\,dl = G\,dl$$

$$\vec{F} = \int_A^B G\,dl$$

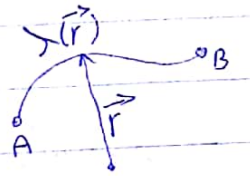
مثال : نیروی مغناطیسی وارد بر یک سیم نازک جریان



$$\vec{dF} = I\,\vec{dl}\times\vec{B}$$

$$\vec{F} = \int \vec{dF} = \int I\,\vec{dl}\times\vec{B} = \int_c \vec{G}\times\vec{dl}$$

مثال : بار کلی یک توزیع بار خطی λ ؟



$$dq = \lambda(\vec{r})\,dl$$

$$q = \int_c \lambda\,dl = \int_c \phi\,dl$$

نتیجه انتگرال گیری	انتگرال گیری خطی
برداری	$\int_c \vec{G}\,dl$ $\int_c \vec{G}\times dl$
اسکالر	$\int_c \phi\,dl$ $\int_c \vec{G}\cdot\vec{dl}$

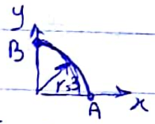
$\vec G = G_x\hat x + G_y\hat y + G_z\hat z$

$\vec{dl} = dx\,\hat x + dy\,\hat y + dz\,\hat z$

دوشنبه
۱۲/۱۲ – ۱۲/۰

$$\int_C \vec G\cdot\vec{dl} = \int_C G_x(x,y,z)\,dx + \int_C G_y(x,y,z)\,dy + \int_C G_z(x,y,z)\,dz.$$

$$\int_C \Phi\, dl = \int_C \Phi(x,y,z)\,dl = \int_C \Phi(x,y,z)\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dx$$



مثال ۵

$\vec F = xy\,\hat x - 2x\,\hat y$

$\vec{dl} = dx\,\hat x + dy\,\hat y$

الف) حل به روش دکارتی $\int_A^B \vec F\cdot\vec{dl}$

$x^2+y^2=9 \quad (0\leqslant x,y\leqslant 3)$

$$\int_A^B \vec F\cdot\vec{dl} = \int_3^0 x\sqrt{9-x^2}\,dx - 2\int_0^3 \sqrt{9-y^2}\,dy$$

$$I = \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int \vec F\cdot\vec{dl} = -\frac{1}{3}(9-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_3^0 - \left[y\sqrt{9-y^2}+9\sin^{-1}\frac{y}{3}\right]_0^3$$

$$= -9\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$$

ب) حل به روش مختصات استوانه‌ای.

$\vec{dl} = 3\,d\phi\,\hat\phi$

$$\begin{bmatrix}F_r\\F_\phi\\F_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\phi & -\sin\phi & 0\\ \sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}F_x\\F_y\\F_z\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix}F_r\\F_\phi\\F_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos & \sin & 0\\ -\sin & \cos & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_x\\F_y\\0\end{bmatrix}$$

$\vec F = (xy\cos\phi - 2x\sin\phi)\,\hat r - (xy\sin\phi + 2x\cos\phi)\,\hat\phi$

$x = 3\cos\phi$

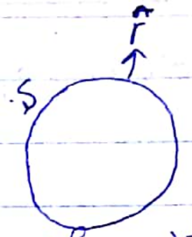
$y = 3\sin\phi$

$$\int \vec F\cdot\vec{dl} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -3\left(9\sin^2\phi\cos\phi + 6\cos^2\phi\right)d\phi$$

$$= -9\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$$

انتگرال سطح:

$\int_s \vec{A}\cdot\vec{ds}$ $\qquad$ $\vec{ds} = ds\,\vec{a_n}$



$\vec{a_n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$ $\qquad$ $\vec{N} = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$

گرادیان

$\int_s \vec{A}\cdot\vec{ds} = \int_s \vec{A}\cdot\vec{a_n}\,ds$

انتگرال حجم:

$\int_v A\,dv$

مثال: بار الکتریکی با چگالی حجمی $\rho = \rho_0 \frac{r^2}{a^2}$ برای $r \leq a$ در کره ای به شعاع a توزیع شده است. مقدار بار الکتریکی ؟

$Q = \int_v \rho\,dv = \int \rho_0 \frac{r^2}{a^2} r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, dr = \frac{\rho_0}{a^2}\int_0^a r^4 dr \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$

$= \frac{4}{3}\rho_0 \pi a^3$

مشتق گیری برداری:

• گرادیان $\vec{grad}$

$dT = \frac{\partial T}{\partial x}dx + \frac{\partial T}{\partial y}dy + \frac{\partial T}{\partial z}dz$

$dT = \underbrace{\left(\frac{\partial T}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{z}\right)}_{\vec{grad}\,T}\cdot(dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z})$

$\begin{cases} dT = \vec{grad}\,T\cdot\vec{dl} = |\vec{grad}\,T||\vec{dl}|\cos\theta \\ |\vec{dl}| = dl \end{cases}$ $\qquad \frac{dT}{dl} = |\vec{grad}\,T|\cos\theta$