

سوال تحصیلی

سوالات امتحانی پایان نیمسال

نام درس: ریاضی مهندسی نام استاد: گروه ریاضی کد درس: ۲۳۸ گروه آموزشی: ریاضی
تاریخ امتحان: ۱۲, ۱۲, ۱۳۸۴ مدت امتحان: ۸۰ دقیقه جزوه: □ □



دانشگاه فنی

کارکلاس و میان آزمون (۲ نمره)

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست

۱) سری فوری تابع $f(x) = \sin(\pi x) + |x|$ $(-1 \leq x \leq 1)$

$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (\sin(\pi x) + |x|) \cos(n\pi x) dx = \frac{2(1-1)^2 - 1}{\pi}$

$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (\sin(\pi x) + |x|) \sin(n\pi x) dx = \frac{2}{\pi}$

۲) انتگرال سینوسی فوری $f(x) = \pi e \cos x$ $(x > 0)$

$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \pi e \cos x \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e \cos(x(1+n)) dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(x(1+n))}{1+n} \right]_0^\infty = 0$

$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \pi e \cos x \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e \sin(x(n-1)) dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos(x(n-1))}{n-1} \right]_0^\infty = \frac{1}{\pi(n-1)}$

الف) $u_{xx} + u_{yy} = 0$ $(0 < x, y < \pi)$

$\begin{cases} u_y(x, 0) = 2x - 1 \\ u_y(x, \pi) = 0 \end{cases}$ $(0 \leq x \leq \pi)$

$\begin{cases} u_x(0, y) = y + 1 \\ u_x(\pi, y) = 2 \end{cases}$ $(0 \leq y \leq \pi)$

$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{y^2 + 1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} y \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi(n-1)} \sin(ny) \right) \cos(nx)$

ب) $u_t - a u_{xx} = t e^{-x}$ $(0 < x < \pi)$

$\begin{cases} u(x, 0) = e^{-x} \\ u(0, t) = 1 \end{cases}$ $(0 \leq x < \pi)$

$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{-x} \sin(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi t e^{-x} \sin(nx) dx \right) \cos(nx) + e^{-x}$

۳) نقش نیمه فرض مقابل راست نگاشت $w = f(z) = \frac{z-1-i}{z+1+i}$

$w = \frac{x+iy-1-i}{x+iy+1+i} = \frac{(x-1)+i(y-1)}{(x+1)+i(y+1)}$

$u = \frac{(x-1)^2 - (y-1)^2}{(x+1)^2 + (y+1)^2}$

$v = \frac{2(x-1)(y-1)}{(x+1)^2 + (y+1)^2}$

خط $y=x$ را در نظر بگیرید

۴) رابطه آن بین a و b است که $u = \cos(ax) \cosh(by)$ همواره هارمونیک باشد

$\Delta u = -a^2 \cos(ax) \cosh(by) + b^2 \cos(ax) \cosh(by) = 0 \Rightarrow b^2 = a^2 \Rightarrow b = \pm a$

۵) $\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{(x^2+b^2)^2} dx$

$I = \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(ax)}{(x^2+b^2)^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{iax} + e^{-iax}}{(x^2+b^2)^2} dx$

$I = \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{iax}}{(x^2+b^2)^2} dx + \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-iax}}{(x^2+b^2)^2} dx \right)$

$I = \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi i}{2} \frac{1}{(2b)^2} \left(\frac{1}{2b} + \frac{1}{2b} \right) \right) = \frac{\pi}{2b^3}$

بسمه تعالی

سؤالات امتحانی ریاضیات هندسی کارشناسی مکانیک و هوا و فضا (پایان ترم دوم ۸۴-۸۵ واحد علوم و فنون)

۱. نقش ناحیه محصورین $x=0, y=0, x=1, y=1$ را تحت نگاشت $w=z^2$ یافته در رسم کنید.

۲. a و b را طوری بیابید که تابع زیر کتلی شود و تابع حاصل را به صورت تابعی از z بنویسید.

$$f(z) = \cos x (\cos y + a \sinh y) + i \sin x (\cos y + b \sinh y)$$

۳. برای کتلی بودن و کتلی نبودن $f(z) = \ln(3z - 2 + i) + \frac{\bar{z}}{|z||z|}$ را مشخص کنید.

۴. محلول است حل مادلر زیر

$$\ln z^2 = 3 - 3i$$

۵. مطلوب است با سبب اشتراک زیر این اشتراک را به دست آورید و آن را حل کنید

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta + 1}{2 \sin \theta - 1} d\theta$$

۶. اشتراک زیر را محاسبه کنید

a) $\int_{|z|=2} \frac{(z^2+1)(z^2+4)}{(z+1)^2(z^2+9)} dz$

b) $\int_{|z|=1} (z \cot z + \cos z + \frac{\bar{z}}{z}) dz$

۷. مطلوب است با سبب اشتراک

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^4 + 1} dx$$

با آرزوی موفقیت

ترم اول ۸۴-۱۳۸۳

پاسخ در صفحه ۱۳

۱- به کمک انتگرال فوریه کسینوسی تابع $f(x) = \frac{\pi}{\gamma} e^{-x}, x > 0$ ثابت کنید $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2e}$

۲- مسئله دیفرانسیل جزئی زیر را حل کنید:

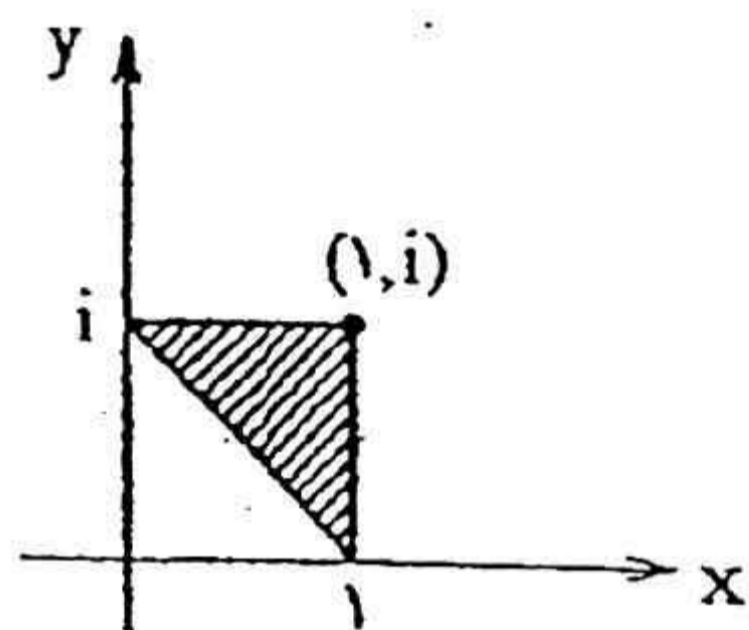
$$u_t = u_{xx} + \gamma u, 0 < x < \pi, t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, 0 \leq x \leq \pi$$

$$\begin{cases} u_x(0, t) = \gamma \sin t, t \geq 0 \\ u_x(\pi, t) = \gamma \cos t, t \geq 0 \end{cases}$$

$|u|$ وقتی که $t \rightarrow +\infty$ کراندار است.

۳- ثابت کنید که اگر z از نگاه تابع $u(x, y) = \ln \sqrt{|z|}$ همساز است و سپس تابع $v(x, y)$ را طوری بیاید که تابع $f(z) = u + iv$ تابعی تحلیلی گردد.



۴- الف) نگاشت $\omega = z^2$ ناحیه محدود به مثلث مقابل را به چه ناحیه‌ای می‌نگارد؟

ب) نقش ناحیه‌ی $D = \{x + iy \mid x \geq 1, y \geq 1\}$ توسط نگاشت $\omega = i \frac{z-1}{z+1}$ چیست؟

۵- انتگرال زیر را حل کنید.

$$\oint_{|z|=r} \left(\frac{1}{z-1} \sin\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{\bar{z}}{z} \right) dz$$

شهریور ماه ۱۳۸۲

پاسخ در صفحه ۱۷

۱- سری فوری $f(x) = 3x^2 - 2x$, $-\pi < x < \pi$ و $f(x+2\pi) = f(x)$ را نوشته و به کمک آن مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ را به دست آورید.

۲- معادله زیر را حل کنید.

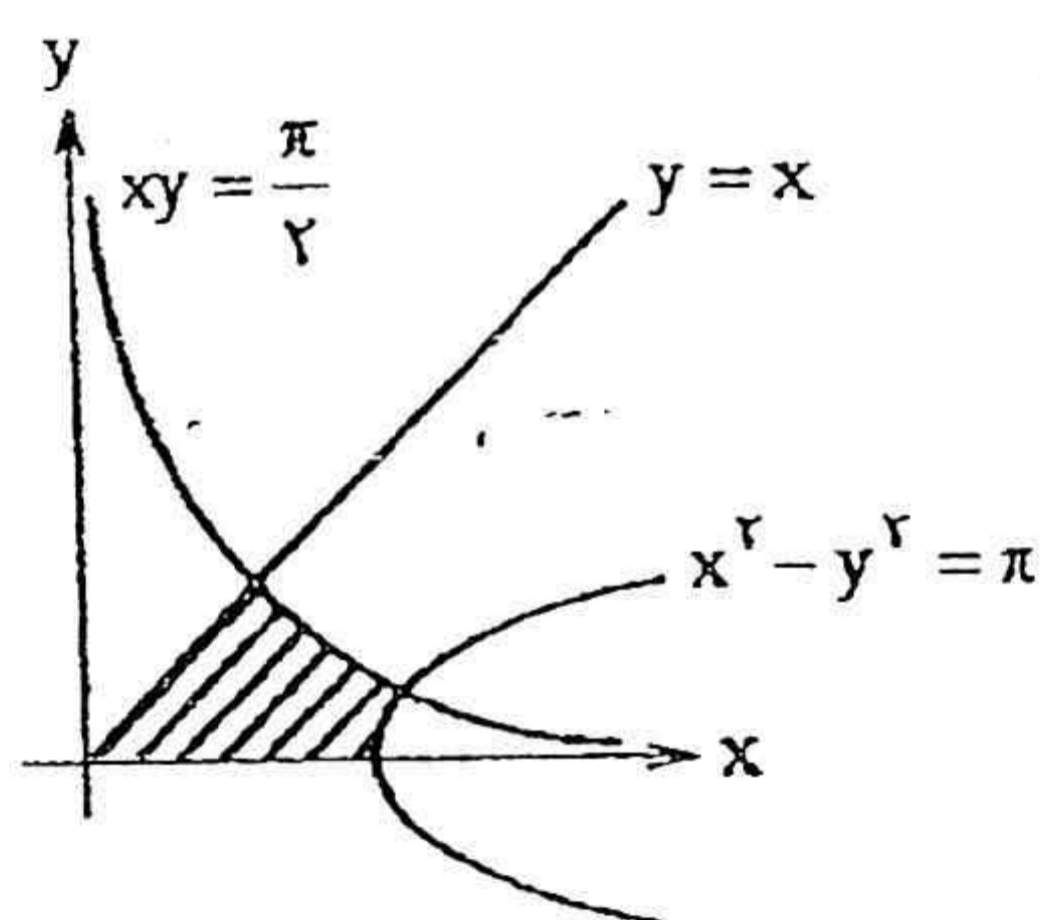
$$u_t - fu_{xx} = x + t^2$$

$$\begin{cases} u(x,0) = x & x, y \rightarrow \infty \text{ هرگاه } u(x,y) \rightarrow \infty \\ u_x(0,t) = \cos t & 0 \leq x \leq 2 \\ u_x(2,t) = \sin t \end{cases}$$

۳- نقاط تحلیلی $f(z) = |x - 2y| + i|y + 2x|$ را به دست آورید.

۴- نقاط تکین و نوع آن را برای تابع $f(z) = \frac{e^{-z}}{(z-1)^2} + \frac{\text{Sh}z}{z^2}$ یافته و سپس $\int_{|z|=2} f(z) dz$ را محاسبه کنید.

۵- تصویر ناحیهی زیر را تحت نگاشت $\omega = z^2$ بیابید.



۶- انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos mx}{1+x^2} dx, \quad m > 0$$