* تمرینات فصل دوم (معادلات با مشتقات جزئی)

تمرین ۵.۲ صفحه‌ی <u>۹۱</u>

مسئله ارتعاش را در حالتی حل کنید که انحراف در روی مرز ناحیه صفر و سرعت اولیه و انحراف اولیه آن به صورت داده شده باشند.

a. $u(x,0) = x(1-x) \qquad 0 \leq x \leq 1$

$u_t(x,0) = 0$

در این سؤال $\quad l=1 \;,\; \lambda_n = cn\pi \quad \Leftarrow$

$$a_n = \frac{2}{1}\int_0^1 x(1-x)\sin n\pi x\,dx$$

$$a_n = 2\left[(x-x^2)\left(\frac{-\cos n\pi x}{n\pi}\right) - (1-2x)\left(\frac{-\sin n\pi x}{(n\pi)^2}\right) + (-2)\,\frac{\cos n\pi x}{(n\pi)^3}\right]_0^1$$

$$a_n = \frac{4}{(n\pi)^3}\left[1+(-1)^{n+1}\right] \qquad u_t(x,0)=0 \Rightarrow b_n = 0$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(n\pi)^3}\left[1+(-1)^{n+1}\right] \cos cn\pi t \,\sin n\pi x$$

b. $u(x,0) = 3\sin x \quad , \quad u_t(x,0) = 0 \qquad 0 \leq x \leq \pi$

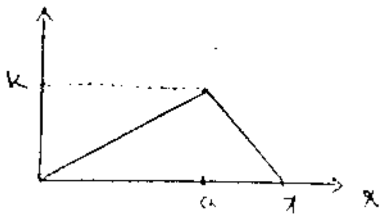
با توجه به $u(x,0)$ نتیجه می‌گیریم سری سینوسی فوریه این تابع که برابر با a_n خواهد بود فقط شامل جمله‌ی اول سری با ضریب $a_1 = 3$ می‌باشد پس سایر جملات ضریب صفر داشته و داریم:

$$\lambda_1 = \frac{c\pi}{\pi} = c$$

$$\Rightarrow u(x,t) = a_1 \sin x \cos ct = 3 \cos ct \sin x$$

۲ـ مسئله ارتعاش نخ را در حالتی حل کنید که انحراف اولیه ارتعاش برابر یکی از توابع زیر و سرعت اولیه آن صفر باشد. وضعیت ارتعاش را در چند لحظه که خود انتخاب خواهید نمود به کمک جواب حاصل از روش دالامبر رسم کنید. $(c=1)$

الف)



$$u(x,0)=\begin{cases}\frac{k}{a}x & 0\leq x\leq a\\ \frac{k}{a-\pi}(x-\pi) & a<x\leq\pi\end{cases}$$

$u_t(x,0)=0 \qquad u(0,t)=0 \qquad u(\pi,t)=0$

$c=1 \qquad L=\pi \qquad \lambda_n=\frac{cn\pi}{L}=n \qquad b_n=0$

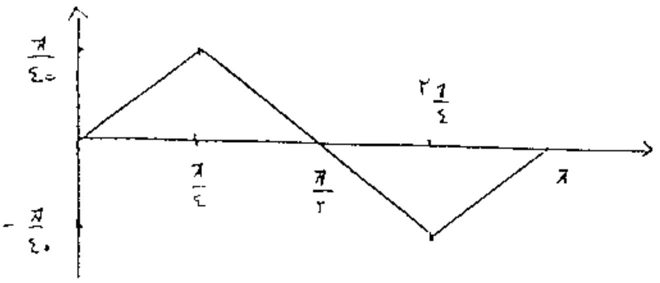
$$a_n=\frac{۲}{\pi}\int_0^a \frac{k}{a}x\sin nx\,dx+\frac{۲}{\pi}\int_a^\pi \frac{k}{a-\pi}(x-\pi)\sin nx\,dx$$

$$=\frac{۲}{\pi}\left[\frac{k}{a}x\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)-\frac{k}{a}\left(\frac{-\sin nx}{n^۲}\right)\right]_0^a+\frac{۲}{\pi}\left[\frac{k(x-\pi)}{a-\pi}\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)-\frac{k(-\sin nx)}{(a-\pi)n^۲}\right]_a^\pi$$

$$=\frac{۲k}{a(a-\pi)}\left[-\frac{\pi\sin na}{n^۲}\right]=\frac{۲k}{a(a-\pi)}\frac{\sin na}{n^۲}\Rightarrow$$

$$u(x,t)=\frac{۲k}{a(a-\pi)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin na}{n^۲}\cos nt\sin nx$$

ب)



$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$

$u_t(x,0) = 0$

$u(x,0) = f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}x & 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \\ -\frac{1}{10}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) & \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{3\pi}{4} \\ \frac{1}{10}(x-\pi) & \frac{3\pi}{4} \leq x < \pi \end{cases}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{10} x \sin nx \, dx + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} -\frac{1}{10}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sin nx \, dx + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \frac{1}{10}(x-\pi) \sin nx \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{10}x\frac{\cos nx}{n} + \frac{1}{10}\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{10}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\frac{\cos nx}{n} - \frac{1}{10}\frac{\sin nx}{n^2}\right]_{\pi/4}^{3\pi/4}$$

$$+\left[-\frac{1}{10}(x-\pi)\frac{\cos nx}{n} + \frac{1}{10}\frac{\sin nx}{n^2}\right]_{3\pi/4}^{\pi} = \frac{4}{10\pi}\left[\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^2} - \frac{\sin\frac{3n\pi}{4}}{n^2}\right]$$

$a_1 = 0 \quad a_2 = \frac{4}{5\pi} \times \frac{1}{4} \quad a_3 = 0 \quad a_4 = \frac{4}{5\pi} \times 0 = 0 \quad a_5 = 0 \quad a_6 = \frac{4}{5\pi} \times \left(-\frac{1}{36}\right)$

$a_7 = 0 \quad a_8 = 0 \quad a_9 = 0 \quad a_{10} = \frac{4}{5\pi} \times \frac{1}{100}$

$$\Rightarrow u = \frac{4}{5\pi}\left(\frac{1}{4}\cos 2t \sin 2x - \frac{1}{36}\cos 6t \sin 6x + \frac{1}{100}\cos 10t \sin 10x \mp \cdots\right)$$

۳- جواب عمومی یک از معادلات زیر را به روش متغیرها به دست آورید

a. $u_x + u_y = 0$

$u = g(x)\, f(y)$

$u_x = f(y)\, \dot{g}(x) \qquad u_y = g(x)\, f'(y)$

$u_x + u_y = \dot{g}(x) f(y) + g(x) f'(y) = 0 \implies \dot{g}(x) f(y) = -g(x) f'(y) \implies \dfrac{g(x)}{\dot{g}(x)} = \dfrac{f(y)}{f'(y)} = k$

باید برابر با عدد ثابت باشند

$f(y) + c_0 f'(y) = 0 \implies f(y) = A e^{-\frac{1}{c_0} y}$

$g(x) - c_0 \dot{g}(x) \implies g(x) = A' e^{\frac{1}{c_0} x}$

$\implies U = g(x) f(y) = AA' e^{\frac{1}{c_0}(x-y)} \xrightarrow[\frac{1}{c_0} = c]{AA' = k} k e^{c(x-y)}$

b. $y u_x = x u_y \qquad u = f(x)\, g(y) \qquad u_x = f'(x)\, g(y),\ u_y = \dot{g}(y)\, f(x)$

$y g(y) f'(x) = x f(x) \dot{g}(y) \qquad \dfrac{y\, g(y)}{\dot{g}(y)} = \dfrac{x f(x)}{f'(x)} = k$

$\implies y(g(y)) - k \dot{g}(y) = 0 \quad ① \qquad x f(x) - k f'(x) = 0 \quad ②$

$① \implies \dfrac{\dot{g}(y)}{g(y)} = \dfrac{y}{k} \implies \ln g(y) = \dfrac{1}{2k} y^2 \implies g(y) = e^{\frac{y^2}{2k}}$

$② \implies x f(x) = k f'(x) \implies \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{x}{k} \implies \ln f(x) = \dfrac{x^2}{2k} \implies f(x) = e^{\frac{x^2}{2k}}$

$u = e^{\frac{1}{2k}(x^2 + y^2)} \sim u = e^{k(x^2+y^2)}$

c. $xu_x = yu_y \qquad u_x = f'(x)\,g(y) \qquad u_y = \dot{g}(y)\,f(x)$

$$\Rightarrow x\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{y\,\dot{g}(y)}{g(y)} = k \Rightarrow \quad x f'(x) - k f(x) = 0 \quad ①$$

$$y\,\dot{g}(y) - k\,g(y) = 0 \quad ②$$

$$① \Rightarrow x f'(x) = k f(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{k}{x} \xrightarrow{\text{انتگرال گیری}} \ln f(x) = k\ln x + \ln c_0$$

$$\Rightarrow f(x) = c_0 x^k \quad ①'$$

$$② \Rightarrow y\,\dot{g}(y) = k g(y) \Rightarrow \frac{\dot{g}(y)}{g(y)} = \frac{k}{y} \Rightarrow \ln g(y) = k\ln y + \ln c_1$$

$$g(y) = c_1 y^k \quad ②'$$

$$①', ②' \Rightarrow u = c\,y^k x^k$$

d. $u_{xy} = u \qquad u_x = f'(x)\,g(y) \qquad u_{xy} = \dot{g}(y)\,f'(x)$

$$\Rightarrow f'(x)\,\dot{g}(y) = f(x)\,g(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{g(y)}{\dot{g}(y)} = k$$

$$f'(x) = k f(x) \Rightarrow f(x) = e^{kx}$$

$$g(y) = k\,\dot{g}(y) \Rightarrow g(y) = e^{\frac{y}{k}} \qquad \Rightarrow u = e^{k(x+y)}$$

e. $u_{xx} + u_x - 2u = 0$

$$D = \frac{du}{dx} \Rightarrow (D^2 + D - 2)\,u = 0 \Rightarrow D = 1 \;,\; D = -2$$

$$u = A e^{x} + B e^{-2x} \quad ①$$

در ① A و B توابعی از y هستند پس خواهیم داشت :

$$u = f(y)\,e^{x} + g(y)\,e^{-2x}$$