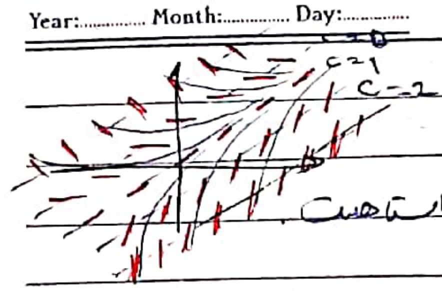
ویدیو اول



شیب میدان راستا ثابت c است:

$c=1$ میدان راستا یا isocline منطبق است.

انتگرال می‌گیریم $x = c$ ... یکی از جواب‌ها است چون مماس بر میدان راستا هست

آنگاه خم‌های انتگرال در بی‌نهایت به $y=x$ می‌رسند.

دو خم جواب یک معادله دیفرانسیل هیچگاه همدیگر را قطع نمی‌کنند چون در آن صورت در نقطه تقاطع دو تا میدان راستا داریم و این نقطه جور می‌شود که امکان‌پذیر نیست.

اما آیا مماس می‌توانند باشند؟ چون در نقطه‌ی تماس خط مماس یکی است.

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

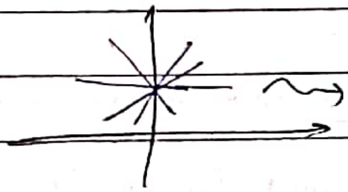
در این صورت ما دو جواب داریم با یک شرط اولیه.

قضیه وجود و یکتایی.

مثال $xy' = y-1 \to \frac{dy}{y-1} = \frac{dx}{x} \xrightarrow{\text{انتگرال}} \ln|y-1| = \ln|x| + C_1$

$y-1 = Cx$

← $y = 1 + Cx$ عرض از مبدا ثابت و شیب متغیر است.



جوابها به جز محور

غیر از $(0,1)$ نقطه‌ای روی y ها در نظر بگیریم جوابی وجود ندارد پس وجود جواب‌ها نقض می‌شود.

برای شرط اولیه $y(0)=1$ هم بی‌نهایت جواب داریم.

باعث اشکال شد ← $y' = \frac{-1+y}{x}$ برای $x=0$ تعریف نشده

پس آن جایی که پیوستگی نقض می‌شود وجود جواب‌ها نقض می‌شود.

مثال $\begin{cases} y' = 2\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases} \to f(x,y) = \sqrt{y}$

$f_y = \frac{1}{2\sqrt{y}}$

$\left.\begin{array}{l} y_1(x) = x^2 \\ y_2(x) = 0 \end{array}\right\}$ هر دو صدق می‌کنند و یکتایی جواب نقض می‌شود

اگر یکتایی یا وجود نقض شد پیوستگی نداریم

Year:............ Month:............ Day:............

ویدیو دوم

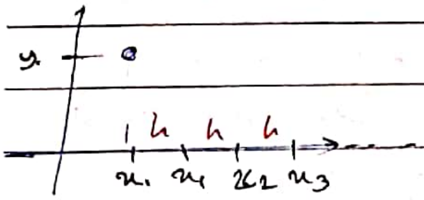
اکثر معادلات دیفرانسیل حل دقیق ندارند و باید آن ها را به روش عددی حل کرد.

(روش اویلر)

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \longrightarrow \text{مسئله مقدار اولیه}$$

اویلر مبنای خیلی از روش ها است.

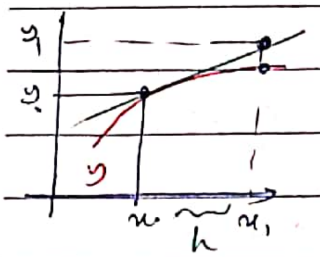
$x_n = x_0 + nh \quad (n \in \mathbb{N})$ یک دنباله در نظر می‌گیریم و می‌خواهیم روی این نقاط جواب را تخمین بزنیم.



خط مماس بهترین تخمین از تابع است در اطراف آن نقطه

مقدار y ما در نقطه x_0 بر خط مماس ما واقع است.

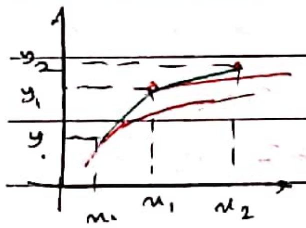
$$y(x) \simeq y(x_0) + (x - x_0) f(x_0, y_0) \rightarrow \text{معادله خط مماس}$$



برای به دست آوردن مقدار در x_1 جای x در این معادله x_1 می‌گذاریم.

$$y(x_1) \simeq y_1 = y_0 + \underbrace{h}_{(x_1 - x_0)} f(x_0, y_0)$$

در گام بعدی می‌خواهیم مقدار تابع را در نقطه x_2 تخمین بزنیم.



$$y(x) \simeq y_1 + f(x_1, y_1)(x - x_1) \quad \text{for } x \in [x_1, x_2]$$

مقدار در x_2 ⟵ $y(x_2) \simeq y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$

مجموع این تخمین‌ها روی بازه $[x_1, x_2]$ تعریف یک خط شکسته و تا n ام تابع خط

$$y(x) \simeq y_n + A_n (x - x_n) \quad \text{for } x \in [x_n, x_{n+1}]$$

$A_n = f(x_n, y_n)$ ⇒ ضریب زاویه.

$y(x_{n+1}) \simeq y_{n+1} = y_n + A_n (x_{n+1} - x_n)$ ⟵ برای به دست آوردن مقدار تقریبی در نقطه x_{n+1}

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h \\ y_{n+1} = y_n + h A_n \\ A_n = f(x_n, y_n) \end{cases}$$

Year:........ Month:........ Day:........

دیفری دو

مثال)

$$\begin{cases} y' = x^2 - y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

step size در نظر می‌گیریم 0.1 است

$A_n = f(x_n, y_n)$

n	x_n	y_n	A_n	hA_n
0	0	1	-1	-0.1
1	0.1	0.9	-0.8	-0.08
2	0.2	0.82		

← این مقادیر را نیاز داریم و حساب می‌کنیم

$x_1 = x_0 + h \rightarrow x_1 = 0.1$

$y_1 = y_0 + hA_0 = 0.9$

$A_1 = f(x_1, y_1) = x_1^2 - y_1^2 = 0.01 - 0.81 = -0.8$

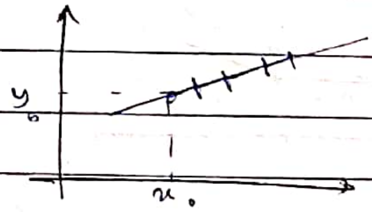
$y(0.2) \approx 0.82 \longrightarrow$ تخمین مطابق روش اویلر

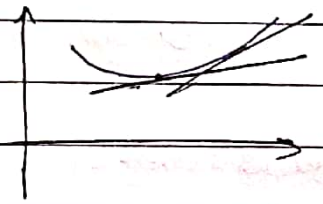
خطای این تخمین چه قدر است؟

یعنی الان باید ببینیم جواب ما از جواب اصلی بزرگ‌تر یا کوچک‌تر است؟

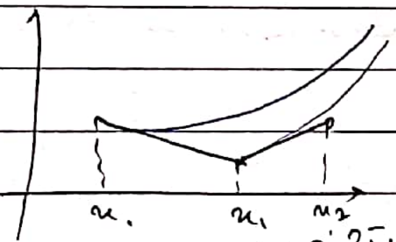
اگر مقدار خطا زیاد است باید تخمین ما دقیق است.

یکی از چیزهایی که به این ارتباط دهد مفهوم تحدب است.





در هر نقطه ای که رسم کنیم این خط زیر منحنی قرار دارد. در صورت محدب بودن



بنابراین این تخمین ما از مقدار واقعی کمتر است.

محدب بودن با مشتق دوم سنجیده می‌شود.

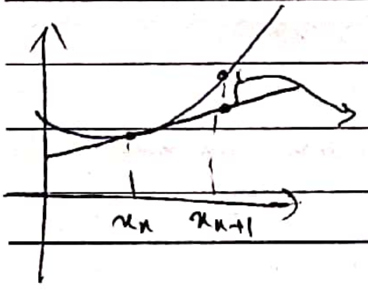
وقتی معادله دیفرانسیل داریم مشتق جواب را داریم، با آن می‌توانیم تقعر و تحدب را تشخیص دهیم

$y' = x^2 - y^2 \rightsquigarrow y'' = 2x - 2yy'$

$(0,1) \rightsquigarrow y'(0) = 0^2 - 1^2 = -1$

$y''(0) = 2\times 0 - 2\times 1\times(-1) = 2 \rightsquigarrow$ تحدب دارد در این نقطه

جواب روش اویلر کمتر از جواب واقعی است.



خطای موضعی

اما این هم خطای اصلی نیست

چون سنجش برای نقطه x_n است.

Year:........ Month:........ Day:........

اویلر دوم .

خطاها روی هم انباشته می‌شوند (در هر مرحله)

یکی از مشکلات اویلر خطای سیستماتیکی داریم که ما را از جواب واقعی دور می‌کند.

برای افزایش دقت h را کم می‌کنیم. ⇐ step size را به سمت صفر میل دهیم.

نرخ همگرایی

$$e = |\underbrace{y(x)}_{\text{واقعی}} - \underbrace{y_n(x)}_{\text{اویلر}}| \quad \rightsquigarrow \quad e \sim c_1 h$$

ارور تابعی از h^1 است

نرخ همگرایی رابطه با توان اول h است ⇐ روش اویلر روش مرتبه اول هم گفته می‌شود.

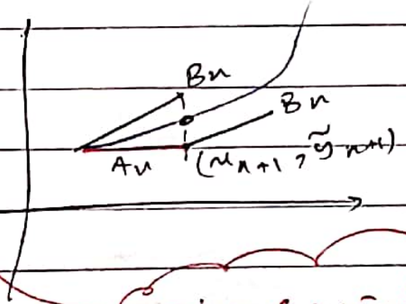
برای نصف کردن خطاها step size هم نصف کنیم.

برای دقیق‌تر کردن شیب A_n را ترمیم می‌کنیم.

$$A_n = f(x_n, y_n) \xrightarrow{\text{ترمیم}} \frac{A_n + B_n}{2}$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h \\ y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{A_n + B_n}{2}\right) \\ \tilde{y}_{n+1} = y_n + h A_n \\ B_n = f(x_{n+1}, \tilde{y}_{n+1}) \end{cases}$$

چیزی که با فرمول اویلر به دست آوردیم



الگوریتم اویلر بهبود یافته

اگر با شیب نقطه بعدی تخمین بزنیم بالای نمودار قرار می‌گیریم (در محدب) وقتی میانگین می‌گیریم نزدیک‌تر به نمودار اصلی می‌شویم و با خطای کمتری از تخمین بالا و پایین پیش می‌رویم.

RK2 → اسم این روش

$$e \sim c_2 h^2$$

$$|y(x_n) - y_n| \leq c_2 h^2$$

این روش در هر گام‌های خودش ۲ محاسبات بیشتری دارد چون هم باید A_n محاسبه شود هم B_n.

محاسبات در 2nk ضرب می‌شود ولی دقت‌ها در $\frac{1}{k^2}$ ضرب می‌شود.

با همین تقریب هم شکل در اویلر ابتدایی محاسبات ضرب در nk^2 می‌شود.

روش Runge-Kutta – RK4 که خطا را در توان 4 دارد $e \sim c_4 h^4$

روش‌های عددی خطای ذاتی هم دارند!