subject: date:

$a(x)y' + b(x)y = c(x)$, $a(x) \neq 0$ روش کلی که همواره جواب می‌دهد:

$y' + p(x)y = q(x) \rightarrow \mu y' + \mu p(x)y = \mu q(x)$

$(\mu y)' = \mu q(x) \Rightarrow \mu y' + \mu' y = \mu q(x)$

$\mu'(x) = p(x)\mu(x) \Rightarrow \mu(x)p(x) = \frac{d\mu}{dx} \Rightarrow p(x)\,dx = \frac{d\mu}{\mu(x)}$

$\Rightarrow \mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}$

$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)q(x)\,dx + c\right]$ $c \in \mathbb{R}$

جواب عمومی

① $x^2y' + 3xy = 1$ $\quad y' + \frac{3}{x}y = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \mu(x) = e^{\int \frac{3}{x}dx} = e^{3\ln x + c} = x^3$

$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{x^3}\left[\int \frac{x^3}{x^2}\,dx + c\right] = \frac{1}{2x} + \frac{c}{x^3}$

② $y\,dx + (3x - xy + 2)\,dy = 0$ $\quad yx' + (3x - xy + 2) = 0 \rightarrow yx' + (3-y)x = -2$

$x' + (\frac{3}{y} - 1)x = -\frac{2}{y} \Rightarrow \mu(y) = e^{\int \frac{3}{y} - 1\,dy} = e^{3\ln y - y + c} = e^{3\ln y - \ln e^y + c} = e^{\ln\frac{y^3}{e^y} + c}$

$= \frac{y^3}{e^y} \Rightarrow x(y) = \frac{e^y}{y^3}\left[\int \frac{y^3}{e^y} \times \frac{-2}{y}\,dy + c\right] = \frac{-e^{-y}(y^2+2y+2) + c}{y^3 e^{-y}}$

③ $\begin{cases} y + y = f(x) \; ; \; f(x) = \begin{cases} 5 & 0 \leq x < 10 \\ 1 & x \geq 10 \\ & x < 0 \end{cases} \\ y(0) = 6 \end{cases}$

پیوست فصل اول:

معادلهٔ خطی: $\mu(x)=e^{\int p(x)\,dx}$ و $y(x)=\frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)q(x)\,dx\right)$

معادلهٔ برنولی: $y'=p(x)y^n+q(x)y \Rightarrow y^{1-n}=u \rightarrow$ خطی می‌شود

معادلهٔ ریکاتی: $y'=a(x)y^2+b(x)y+c(x) \rightarrow y_0 \Rightarrow$ یک دسته جوابی که در معادله صدق می‌کند

$y=y_0+\frac{1}{u} \rightarrow$ با جایگذاری در معادله $\Rightarrow$ u را به دست می‌آوریم و y به دست می‌آید

معادلات جدایی‌پذیر: اگر معادلات را بتوان به صورت $M(x)dx=N(y)dy$ درآورد، آنگاه به راحتی با انتگرال گرفتن از دو طرف می‌توان $y(x)$ را به دست آورد

تابع و معادلهٔ همگن: تابع $f(x,y)$ را همگن گوییم هرگاه $\lambda^k f(x,y)=f(\lambda x,\lambda y)$ از درجهٔ k ـ و معادله‌ای را همگن گوییم که از تقسیم دو تابع همگن به دست آید

معادلهٔ کامل: معادلهٔ $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ را کامل گوییم هرگاه $\exists f(x,y)$

$$df=M(x,y)dx+N(x,y)dy \rightarrow \begin{cases} f_x=M(x,y)\\ f_y=N(x,y)\end{cases} \xrightarrow{\text{شرط کامل بودن}} f_x=f_y$$

حال برای به دست آوردن $f(x,y)$ کافی است $f(x,y)=\int f_x=\int f_y$

اگر معادله کامل نباشد می‌توان آن را اینگونه کامل کرد: $\mu=e^{\int\frac{N_x-M_y}{Mu_y-Nu_x}du}$ و $u=u(x,y)$

معادلهٔ لاگرانژ و کلرو: $y=f(x,y') \Rightarrow y'=p \Rightarrow$ جایگذاری $\Rightarrow$ دیفرانسیل از دو طرف معادله

دسته منحنی متعامد: مشتق می‌گیریم تا c از بین برود

$y=f(x,$: $y'=p \Leftarrow p=f'(x,p)$ سپس با تغییر $y'\to\frac{-1}{y'}$ معادلهٔ دیفرانسیل به دست آمده را حل می‌کنیم

subject: date:

جلسهٔ دوم

$y+y'=f(x)$

$x<10$ ، $y+y'=5 \rightarrow (e^{x}y)'=5e^{x}$ $\int(e^{x}y)'=\int 5e^{x}dx$

$e^{x}y=5e^{x}+c_1 \Rightarrow y=5+c_1e^{-x} \xrightarrow{y(0)=6} y(0)=5+c_1=6 \Rightarrow c_1=1$

$x\geqslant 10$ $y+y'=1 \rightarrow y=1+c_2e^{-x} \Rightarrow y(10)=5+e^{-10}=1+c_2e^{-10}$

$\Rightarrow 4=(c_2-1)e^{-10} \Rightarrow c_2=4e^{10}+1$

معادلات غیرخطی مرتبهٔ اول: $F(x,y,y')=0$

معادلات برنولی: $y'=P(x)y^{n}+q(x)y$

$(n\neq 0,1)$

$y'=P(x)y^{n}+q(x)y$

$y^{1-n}=u$

$\Rightarrow (1-n)y^{-n}y'=u' \rightarrow y^{-n}y'=P(x)+q(x)y^{1-n}$

$\underbrace{(1-n)y^{-n}y'}_{u'}=(1-n)P(x)+q(x)\underbrace{y^{1-n}}_{u}(1-n)$

$\Rightarrow (1-n)q(x)u+(1-n)P(x)=u' \rightarrow$ معادلهٔ مرتبهٔ ۱ خطی

مثال:

① $dy+(y-xy^{3})dx=0 \rightarrow y'+(y-xy^{3})=0 \Rightarrow y'-\underset{P(x)}{x}y^{3}+\underset{q(x)}{y}=0$

$u=y^{1-n} \rightarrow n=3$; $(1-n)y^{-n}y'-(1-n)y^{-n+3}x+(1-n)y^{-n+1}=0$

$u'=(1-n)y^{-n}y'$; $u'-(1-n)x+(1-n)u=0$

$\rightarrow u'+(1-n)u=(1-n)x \Rightarrow u'-2u=-2x$ $\mu(x)=e^{-2\int dx}=e^{-2x}$

$(e^{-2x}u)'=-2xe^{-2x} \Rightarrow e^{-2x}u=\int -2xe^{-2x}dx = xe^{-2x}+\frac{e^{-2x}}{2}+c$

$\Rightarrow u=x+\frac{1}{2}+ce^{2x}$ $(u=y^{-2}) \Rightarrow y=\frac{1}{\sqrt{u}} \Rightarrow y=\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{2}+ce^{2x}}}$

MAXnote