Subject
Date

معادلات دیگر :

$$y'=y \to \frac{dy}{dx}=y \to \frac{dy}{y}=dx \xrightarrow{\int} \ln y + c_1 = x + c_2$$

$$\to \ln y = x + c_2 - c_1 \to \ln y = x + c_3 \to y = e^{x+c_3} \to y = e^x \times e^{c_3}$$

$$y = ce^x \xrightarrow[y(1)=5]{\text{شرط اولیه}} 5 = ce^1 \to c=5 \xrightarrow[\text{جواب}]{\text{خصوصی}} y=5e^x$$

$$\frac{y-1}{x\ln x}=y' \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{y-1}{x\ln x} \to \frac{dy}{y-1}=\frac{dx}{x\ln x}$$

$$y-1=u \to dy=du \to \int\frac{du}{u}=\int u\,du \to \ln x=u \to \frac{dx}{x}=du$$

$$c+\ln(\ln x)=\ln(y-1) \qquad \ln(y-1)=\ln(\ln x)+\ln(c)$$

نکته: در معادله دیفرانسیل $y'=f(ax+by+c)$ ، تغییر متغیر $y=ax+by+c$ ~ معادله جدا شدنی است

$$y'=-\sin^2(x+y+4)$$

$$\frac{dy}{dx}=-\sin^2(u) \qquad x+y+4=u$$
$$1+y'=du$$

$$y'=u'-1 \to u'=-\sin^2(u)+1$$

$$u'=\cos^2(u) \to \frac{du}{dx}=\cos^2(u) \to \frac{du}{\cos^2(u)}=dx$$

$$\int\frac{du}{\cos^2 x}=\int dx \to x+c=\int(1+\tan^2(u))\,du$$

$$x+c=\tan u \to \tan(x+y+4)=x+4$$

(تمرین) $\frac{dy}{dx}=(y-14x)^2$

معادله خطی

حل) $y-14x=u \to y'-14=u' \to y'=u'+14 \xrightarrow{\text{جایگذاری}}$

Subject
Date

(تمرین) $y\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx+(\ln x+\tan^{-1}x)\,dy=0$

(تمرین) $y+1-y'\tan(x)=0$

× $x^2y'dx+e^x dy=0$

$y\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx=-dy\left(\ln x+\tan^{-1}x\right)$

تابع همگن ← تابع $f(x,y)$ را همگن از درجه α گویند هرگاه $\lambda^{\alpha}f(x,y)=f(\lambda x,\lambda y)$

معادله دیفرانسیل:

الف) در معادله مرتبه اول $M(x,y)dx+N(x,y)\,dy=0$
اگر توابع $M(x,y)$ و $N(x,y)$ همگن از درجه یکسان باشند، آنگاه معادله همگن است و با تغییر متغیر زیر به معادله جدا شدنی می‌رسیم

$y=ux\rightarrow dy=x\,du+u\,dx$

ب) در معادله دیفرانسیل مرتبه اول $y'=f(x,y)$
اگر تابع $f(x,y)$ همگن از درجه صفر بود معادله همگن است.
با تغییر متغیر زیر به معادله جداشده می‌رسیم

$y=ux\rightarrow y'=u'x+u$

مثال)

$x\,dx+\sin^2(y/x)\,(y\,dx-x\,dy)=0$

$\rightarrow \underbrace{\left(x+\sin^2(y/x)\,y\right)}_{M}dx-\underbrace{x\sin^2(y/x)}_{N}\,dy=0$

$M(\lambda x,\lambda y)=\lambda x+\sin^2\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right)\lambda y=\lambda\left(x+\sin^2\frac{y}{x}\,y\right)=\lambda^{1}M(x,y)$

همگن از درجه یک

Subject
Date

$\to N(\lambda x,\lambda y) = -\lambda x \sin^2\left(\frac{\lambda x}{\lambda y}\right) = \lambda\left(-x\sin^2 \frac{y}{x}\right) = \lambda^1 N(x,y)$

همگن از درجه یک

چون هردو درجه 1 است معادله دیفرانسیل همگن است.

$y = ux \to dy = x\,du + u\,dx$

$(x + \sin^2(u)\, ux)dx - (x\sin^2(u))(x\,du + u\,dx) = 0$

$x\,dx + \cancel{\sin^2(u)\, ux\,dx} - x^2\sin^2(u)\,du - \cancel{ux\sin^2(u)\,dx} = 0$

$\int \frac{x\,dx}{x^2} = x^2 \int \sin^2(u)\,du \to \ln(x) + C = \int \frac{1-\cos(2u)}{2}$

$\to \ln(x) + C = \frac{1}{2}u - \frac{\sin 2u}{4}$

مثال) $y' - y/x + \csc(y/x) = 0$

$M(\lambda x,\lambda y) \to y' = y/x + \csc(y/x)$

$y' = y/x + \csc(y/x) \to y' = f(x,y)$

$f(\lambda x,\lambda y) = \frac{\lambda y}{\lambda x} - \csc(y/x) \to f(\lambda x,\lambda y)$

$f(x,y)$ ، همگن از درجه صفر

$y = ux \to y' = u'x + u$

$u'x + \cancel{u} = -\csc(u) + \cancel{u} \to x = \frac{-\csc(u)}{u'} \to \int \frac{dx}{x} = \int \sin u\,du$

$y' = \frac{y+x}{x} + \frac{2(x+y)^3}{x^4} - 1$

$u' = 1 + (y')$ $\quad dx = ux^4 \to 2u^3$

نکته: معادله $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y}\right)$ همگن است ولی معادله دیفرانسیل به فرم $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$

همگن نیست اگر معادلات خط صورت و مخرج موازی باشند آنگاه با تغییر متغیر $u = ax+by$ به

معادله جداشدنی می‌رسیم. ولی اگر دو خط $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$ در نقطه (x_0, y_0) برخورد داشته باشند

آنگاه با تغییر متغیر $\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$ به معادله همگن می‌رسیم.

مثال ۱) $y' = -\dfrac{x-2y+3}{2x-4y-3} \xrightarrow[\substack{u=x-2y \\ u'=1-2y'}]{\text{تغییر متغیر}} y' = \dfrac{1-u'}{2}$

$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} \dfrac{1-u'}{2} = -\dfrac{u+3}{2u-3} \to u' = 1+\dfrac{2u+6}{2u-3} = \dfrac{4u+3}{2u-3}$

$\to \dfrac{du}{dx} = \dfrac{4u+3}{2u-3} \to \int dx = \int \dfrac{2u-3}{4u+3}du$ جداشدنی $\to \dfrac{1}{2}\int \dfrac{(4u+3)-9}{4u+3}du = x+c$

$$\boxed{\to \frac{1}{2}\left(u - \frac{9}{4}\ln|4u+3|\right) = x+c}$$

مثال ۲) $y' = 2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2$ نقطه برخورد $\begin{cases} y+2=0 \\ x+y-1=0 \end{cases} \to \begin{matrix} x_0 = 3 \\ y_0 = -2 \end{matrix}$

$\xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} \begin{cases} x = X+3 \\ y = Y-2 \to y' = Y' \end{cases}$

$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} Y' = 2\left(\dfrac{(Y-2)+2}{(X+3)+(Y-2)-1}\right)^2 \to Y' = 2\left(\dfrac{Y}{X+Y}\right)^2$ همگن است.

$\xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} Y = UX \to Y' = U'X + U \xrightarrow{\text{جایگذاری}} U'X + U = 2\left(\dfrac{UX}{X+UX}\right)^2$

$\to U'X = \dfrac{2U^2}{(1+U)^2} - U \to \underbrace{U'}_{\frac{dU}{dX}}X = \dfrac{2U^2-U^3-2U^2-U}{(1+U)^2} \xrightarrow{\text{جداشدنی}} \int \dfrac{1+U^2+2U}{U(U^2+1)}dU = -\int \dfrac{dX}{X}$