Subject:
Date

۳ـ معادله ناهمگن

قضیه:

p، q، g توابع پیوسته روی I و $L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y$

اگر y_1، y_2 دو جواب مستقل خطی $L[y]=0$ باشند و Ψ یک جواب خصوصی

$L[y]=g(t)$ باشد، آنگاه جواب عمومی $L[y]=g(t)$ به صورت

$c_1y_1 + c_2y_2 + \Psi$

است که در آن $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

اثبات

Φ جواب دلخواه $L[y]=g(t)$

$$\left.\begin{aligned} L[\Phi] &= g(t) \\ L[\Psi] &= g(t) \end{aligned}\right\} \rightarrow L[\Phi - \Psi] = L[\Phi] - L[\Psi] = 0$$

$$\xrightarrow{\text{قضیه قبل}} \Phi - \Psi = c_1y_1 + c_2y_2 \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

$$\rightarrow \Phi = c_1y_1 + c_2y_2 + \Psi \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

مثال معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

$y'' + y = t$

معادله همگن متناظر $y'' + y = 0$

$\rightarrow$ معادله مشخصه $r^2 + 1 = 0 \rightarrow r = \pm i$

$\rightarrow$ دو جواب مستقل خطی $y_1 = \cos t \qquad y_2 = \sin t$

یک جواب خصوصی برای معادله داده شده $\Psi = t$

PAPCO

Subject:
Date

→ جواب عمومی $y = c_1 \cos t + c_2 \sin t + t \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

مثال: فرض کنید سه جواب خصوصی یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی ناهمگن عبارتند از

$\psi_1(t) = t \qquad \psi_2(t) = t + e^t \qquad \psi_3(t) = 1 + t + e^t$

جواب عمومی معادله را پیدا کنید.

۲ جواب همگن

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \psi_2 - \psi_1 = e^t \\ y_2 &= \psi_3 - \psi_2 = 1 \end{aligned}\right\rangle \text{ مستقل خطی}$$

→ جواب عمومی $y = c_1 e^t + c_2 + t \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

Subject:
Date

→ جواب عمومی $y = c_1 \cos t + c_2 \sin t + t \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

مثال فرض کنید سه جواب خصوصی یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی ناهمگن عبارتند از

$\varphi_1(t) = t \qquad \varphi_2(t) = t + e^t \qquad \varphi_3(t) = 1 + t + e^t$

جواب عمومی معادله را پیدا کنید.

۲ جواب همگن
$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \varphi_2 - \varphi_1 = e^t \\ y_2 &= \varphi_3 - \varphi_2 = 1 \end{aligned}\right\} \text{ مستقل خطی}$$

→ جواب عمومی $y = c_1 e^t + c_2 + t \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

۸٫۱۴

۴ـ روش تغییر پارامتر

$$L[y] = y'' + p(t)\, y' + q(t)\, y = g(t)$$

p, q, g توابع پیوسته روی بازه I

$L[y] = g(t) \longrightarrow$ جواب عمومی : $y = \underbrace{c_1 y_1 + c_2 y_2}_{\text{دو جواب مستقل خطی معادله همگن متناظر}} + \underbrace{\phi}_{\text{یک جواب خصوصی معادله ناهمگن داده شده}}$

می‌خواهیم توابع u_1, u_2 را طوری پیدا کنیم که

$y = u_1 y_1 + u_2 y_2$ « یکی از کاندیداهای ϕ ».

یعنی جواب معادله ناهمگن داده شده باشد

تغییر پارامترهای c_1, c_2

→ توابع u_1, u_2

PAPCO

Subject:
Date

$$\rightarrow y' = (u_1 y_1' + u_2 y_2') + \underbrace{(u_1' y_1 + u_2' y_2)}_{0}$$

فرض کنید می‌خواهیم u_1 , u_2 را طوری پیدا کنیم که هم y در $L[y]=g(t)$ صدق کند و
هم

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0$$

$$\rightarrow y'' = (u_1 y_1'' + u_2 y_2'') + (u_1' y_1' + u_2' y_2')$$

$$L[y] = g(t) \rightarrow u_1 (y_1'' + p(t) y_1' + q(t) y_1) + u_2 (y_2'' + p(t) y_2' + q(t) y_2) + u_1' y_1' + u_2' y_2' = g(t)$$

$$\rightarrow u_1' y_1' + u_2' y_2' = g(t)$$

پس می‌خواهیم u_1 , u_2 را طوری پیدا کنیم که

$$\begin{cases} y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0 \\ y_1' u_1' + y_2' u_2' = g(t) \end{cases}$$

$$\rightarrow u_1' = \frac{\det \begin{bmatrix} 0 & y_2 \\ g(t) & y_2' \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}} = \frac{-y_2(t)\, g(t)}{W[y_1, y_2](t)}$$

$$u_2' = \frac{\det \begin{bmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & g(t) \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}} = \frac{y_1(t)\, g(t)}{W[y_1, y_2](t)}$$

PAPCO