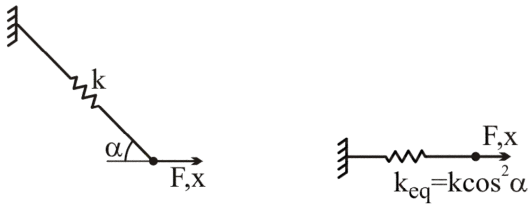
فنرهای پیچشی سری: در این فنرها زاویه پیچش فنر معادل برابر است با مجموع زوایای پیچش دو فنری سری و ثابت فنر پیچشی معادل از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\frac{1}{k_t)_{eq}}=\frac{1}{k_t)_1}+\frac{1}{k_t)_2}$$

ج) فنر مایل

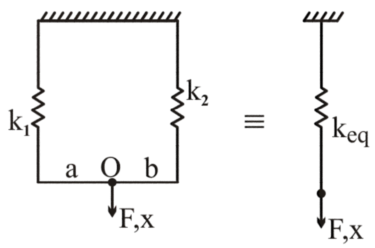
فنر مایل فنری است که جابه‌جایی سرفنر در راستای محور فنر نمی‌باشد.



نکته : دو فنر نشان داده در شکل به یک میله صلب با وزن ناچیز متصل هستند.

فنر معادل آن‌ها در نقطه O عبارت است از:

$$\frac{(a+b)^2}{k_{eq}}=\frac{b^2}{k_1}+\frac{q^2}{k_2}$$



د) فنر غیرخطی

اگر رابطه نیروی فنر $F(x)$ برحسب جابه‌جایی یا تغییر طول آن x یک رابطه غیرخطی باشد فنر خطی معادل آن در نقطه تعادل x_ℓ عبارت است از: $k_{eq}=F'(x_\ell)$

عموماً x_ℓ همان تغییر طول استاتیکی فنر δ_{st} می‌باشد که از رابطه $mg=F(\delta_{st})$ محاسبه می‌گردد.

المان‌های استهلاکی

این المان‌ها به چهار دسته زیر تقسیم می‌شود.

الف) میراکننده لزجی (میرائی سیال کند): نیروی میرائی در این نوع میراکننده عبارت است از $F_d=cv$ که در آن c ضریب میرائی نامیده می‌شود. اتلاف انرژی در یک سیکل برای ارتعاشات هارمونیک $x=X\sin\omega t$ از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$E_d=\int F_d d_x=\int c\dot{x}dx=\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} c(\dot{x})\ (\dot{x}dt)=\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} c\dot{x}^2dt=\pi c\omega X^2$$

یادداشت:

....

....

....

....

ب) میراکننده خشک: این نوع میرائی ناشی از حرکت یک جسم جامد بر روی یک سطح خشک با ضریب اصطکاک μ می‌باشد و نیروی میرائی عبارت است از:

$$F_d = \mu N \operatorname{sgn}(\dot{x}) = \mu N \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} \quad \text{for} \quad \dot{x} \neq 0$$

اتلاف انرژی در یک سیکل برای ارتعاشات‌های هارمونیک $x = X\sin\omega t$ عبارت است از:

$$E_d = \int F_d d_x = \mu mg \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \operatorname{sgn}(\dot{x})\dot{x}dt = 4\mu mgX$$

که در آن $\operatorname{sgn}(\dot{x})$ تابع علامت می‌باشد.

ج) میراکننده سازه‌ای: این نوع میرائی اتلاف انرژی در مواد را به خاطر اصطکاک داخلی تشریح می‌کند. وقتی مواد به طور دوره‌ای تحت تنش قرار می‌گیرند انرژی در داخل ماده بطور داخلی تلف می‌شود. نیروی میرائی عبارت است از:

$$F = k\pi\frac{h}{2}\operatorname{sgn}(\dot{x})|x|$$

اتلاف انرژی در یک سیکل برای ارتعاشات هارمونیک عبارت است از:

$$E_d = \int F_d d_x = \frac{k\pi h}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \operatorname{sgn}(\dot{x})|x|\dot{x}dt = k\pi hX^2$$

در روابط بالا h ضریب میرائی سازه‌ای می‌باشد.

د) میرائی سیال یا میرائی مربع سرعت (میرائی سیال تند): این نوع میرائی همراه سیستمی که در آن جرمی در یک محیط سیال نوسان می‌کند می‌باشد. نیروی میرائی برابر است با

$$F_d = c_d\dot{x}^2 \operatorname{sgn}(\dot{x}) = c_d|\dot{x}|\dot{x}$$

که در آن c_d ضریب میرائی است.

سیستم‌های ارتعاشی یک درجه آزادی

اگر تعادل یک سیستم ارتعاشی به طور ناگهانی دستخوش تغییر گردد سیستم در این صورت به طور آزاد با فرکانس طبیعی (natural frequency) خود نوسان خواهد نمود. اگر به غیر از تحریک ابتدایی، تحریک بیشتری صورت نگیرد ارتعاش را ارتعاش آزاد می‌نامند و جسم با دامنه نوسان رو به نقصان یا کاهنده آنقدر نوسان خواهد نمود تا به حالت سکون درآید. این ارتعاش، ارتعاش گذرا (transient) نامیده می‌شود و کاهش دامنه نوسان به دلیل تبدیل تدریجی انرژی ارتعاشی به حرارت و صورت می‌باشد.

اگر یک نیرو یا حرکت تحریک تکرار شونده (متناوب) سبب ارتعاش یک سیستم گردد. ارتعاش را ارتعاش اجباری می‌نامند.

پریود نوسان $\tau[\text{sec}]$: مدت زمان انجام یک نوسان را می‌نامند.

فرکانس خطی $f = \frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\text{sec}}\right)$: تعداد نوسانات در واحد زمان می‌باشد.

فرکانس دایروی یا زاویه‌ای $\omega_n = \frac{2\pi}{\tau} = 2\pi f\left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}}\right]$: زاویه طی شده در واحد زمان

یادداشت:

....

....

....

....

معادله حاکم بر ارتعاش سیستم جرم و فنر و پاسخ آن :

$$m\ddot{x}+kx=0 \quad , \quad \omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}$$

$$x=X\sin(\omega_n+\varphi) \quad , \quad x=x_0\cos\omega_n t+\frac{v_0}{\omega_n}\sin\omega_n \quad , \quad X=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\varphi=\tan^{-1}\left(\frac{x_0\omega_n}{v_0}\right)$$

معادله حاکم بر پاندول ریسمانی:

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{\ell}\sin\theta=0$$

برای نوسانات کوچک $\sin\theta\approx\theta$ و لذا

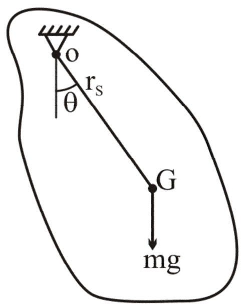
$$\ddot{\theta}+\frac{g}{\ell}\theta=0 \quad , \quad \omega_n=\sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

نکته : ترکیب دو حرکت هارمونیک با دامنه‌های متفاوت و فرکانس و فاز یکسان یک حرکت هارمونیک با همان فرکانس و فاز متفاوت می‌باشد.

نکته : ترکیب دو حرکت هارمونیک با دامنه‌های برابر و فرکانس و فاز متفاوت یک حرکت هارمونیک با دامنه متغیر با زمان می‌باشد.

معادله حاکم بر نوسان پاندول مرکب یا فیزیکی

هر جسم صلب که در یک نقطه لولا باشد یک پاندول مرکب یا فیزیکی را بوجود می‌آورد.



$$J_0\ddot{\theta}+mgr_s\sin\theta=0 \xrightarrow{\sin\theta\approx\theta} \ddot{\theta}+\frac{mgr_s}{J_0}\theta=0 \Rightarrow \omega_n=\sqrt{\frac{mgr_s}{J_0}}$$

که در آن J_0 ممان اینرسی جرمی پاندول حول نقطه O می‌باشد و r_s فاصله مرکز جرم تا تکیه‌گاه O است.

در حالت خاص که یک میله یکنواخت به طول ℓ و جرم m در یک انتها لولا شده است را درنظر بگیرید. در اینصورت $J_0=\frac{1}{3}m\ell^2$ و $r_s=\frac{\ell}{2}$ و لذا:

$$\omega_n=\sqrt{\frac{mg\frac{\ell}{2}}{m\frac{\ell^2}{3}}}=\sqrt{\frac{3g}{2\ell}}$$

یادداشت:

....

....

....

....