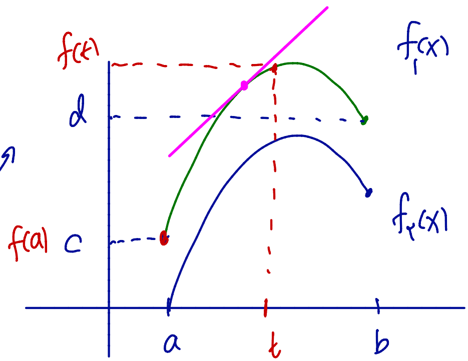
رابطه بین تابع مکان و تابع سرعت یک ذره متحرک و تقریب حرکت ذره با ذره‌ای که حرکت آن قطعه قطعه یکنواخت است

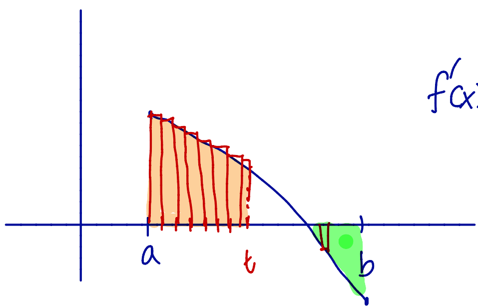
$$\boxed{f_1'(x)=f_2'(x) \Leftrightarrow f_2(x)=f_1(x)+C}$$



پادمشتق

مشتق‌گیری

$f'(x)=g(x)$

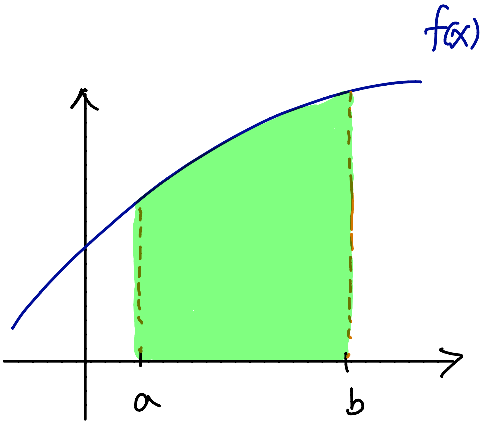


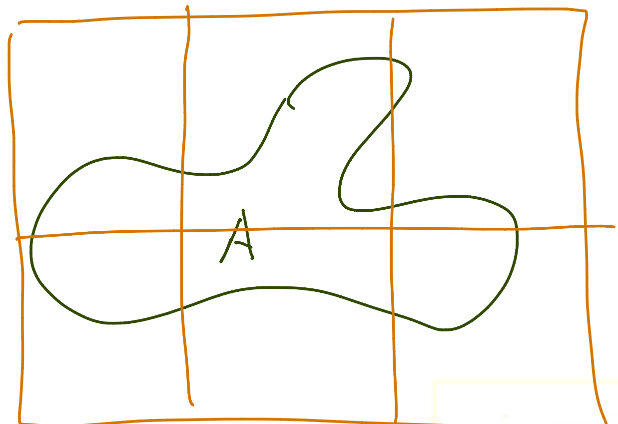
میزان جابجایی در بازه زمانی $[a,t]$ $= f(t)-f(a)$

$=$ مساحت زیر نمودار تابع $g(x)$ روی بازه $[a,t]$

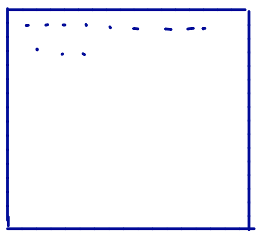
بسم الله الرحمن الرحیم :

انتگرال توابع و توابع انتگرال‌پذیر :





* آیا برای هر شکل می‌توان مساحت تعریف کرد ؟ (شکل : یک زیرمجموعه از نقاط صفحه)

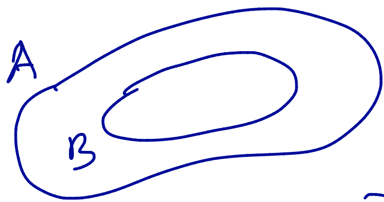


$A=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix},\ x,y\in\mathbb{Q},\ 0\leq x,y\leq 1\right\}$

$B=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix},\ x\in\mathbb{Q},\ 0\leq x,y\leq 1\right\}$

ویژگی های مساحت:

۱) مثبت باشد. حقیقی باشد!



۲) رابطهٔ ترتیب

$B\subseteq A \Rightarrow S(B)\leq S(A)$

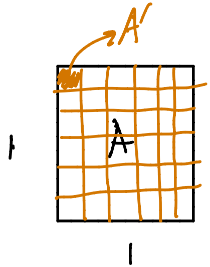
۳) جمع پذیری

اگر A و B جدا از هم باشند

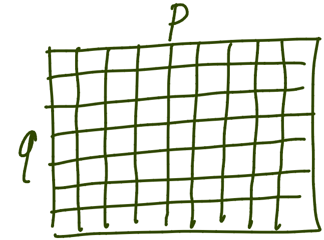
$S(A\cup B)=S(A)+S(B)$

(توجه: ما تنها مجاز هستیم متناهی تا مجموعه جدا را اجتماع بگیریم.)

۴) مساحت با انتقال و دوران تغییر نکند!



$S(A) = 1 = n^2 S(A') \Rightarrow$



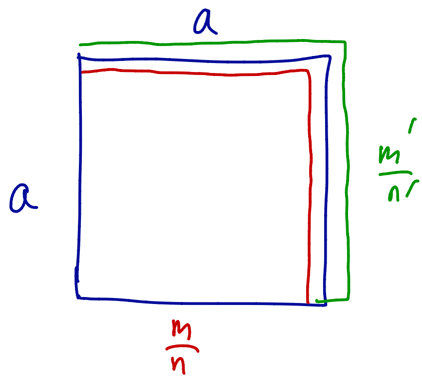
$\frac{pq}{n^2} =$ مساحت

توجه کنید که ما راجع به اجتماع نامتناهی مجموعه‌های مجزا مثل A_α که $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$ چیزی نمی‌توانیم بگوییم:

مثلاً نمی‌توانیم بگوییم $S(\bigcup A_\alpha) = \sum_\alpha S(A_\alpha)$.

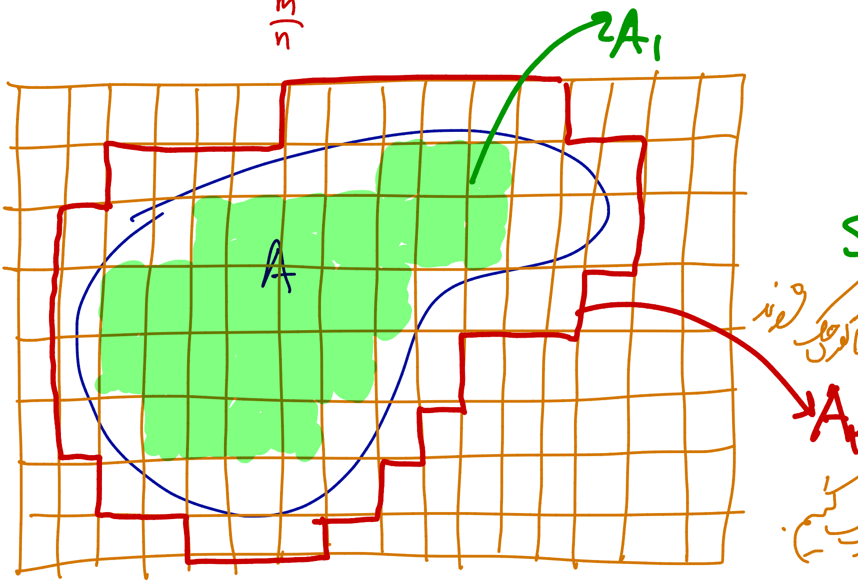
ولی برای متناهی تا با یک استقرای ساده می‌توانیم نشان دهیم: $S(A_1 \cup \dots \cup A_k) = S(A_1) + \dots + S(A_k)$

برای مربع‌ها با اضلاع کوچک نیز می‌توانیم مساحت را محاسبه کنیم: (با تقریب از درون و بیرون آن):



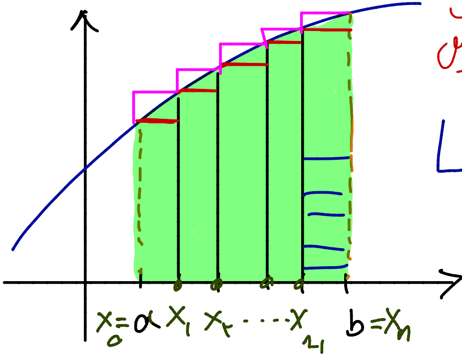
$$S(A_{\frac{m}{n}}) \leq S(A_a) \leq S(A_{\frac{m'}{n'}})$$

$$\begin{array}{ccccc} S(A_{\frac{m}{n}}) & & & & S(A_{\frac{m'}{n'}}) \\ \| & & & & \| \\ \frac{m^2}{n^2} & \longrightarrow & a^2 & \longleftarrow & \frac{m'^2}{n'^2} \end{array}$$



$$S(A_1) \leq S(A) \leq S(A_2)$$

اگر حد $S(A_1)$ و $S(A_2)$ وقتی مربع‌ها کوچک شوند وجود داشته باشد و یکسان باشد آنگاه مساحت شکل A را می‌توانیم تعریف کنیم.



افراز بازهٔ $[a,b]$: $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$

$x_i^* \in [x_i, x_{i+1}]$

مساحت یک مستطیل $= f(x_i^*)\underbrace{(x_{i+1}-x_i)}_{\Delta x_i}$

$$L(f,P)=\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i^*)\,\Delta x_i$$

بزرگی افراز P :

$$|||P||| := \max_{i=0,\dots,n-1} |\Delta x_i|$$

مجموع مساحت مستطیل‌های بزرگتر ≥ مساحت زیر نمودار تابع f روی بازهٔ $[a,b]$ ≥ مجموع مساحت مستطیل‌های کوچکتر

$\lim_{|||P|||\to 0} L(f,P) = S \iff$ مساحت زیر نمودار تابع f قابل تعریف است (به معنی بالا)

در این صورت می‌نویسیم

$$\int_I f(x)\,dx = S$$

<u>تعریف:</u> فرض کنید f تابعی کراندار روی بازهٔ بستهٔ $[a,b]$.

تابع f را روی $I=[a,b]$ انتگرال‌پذیر (به معنی ریمان) گوییم هرگاه مساحت زیر نمودار تابع f روی بازهٔ I قابل تعریف باشد (با روش بالا) در این صورت

$$\int_I f(x)\,dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i^*)\,\Delta x_i$$

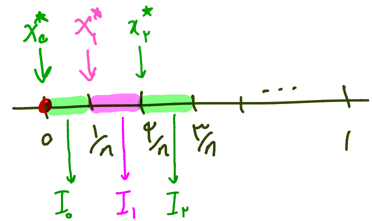
این تعریف برای انتگرال پذیری نه برای نشان دادن انتگرال پذیری مفید است نه برای محاسبه آن ولی اگر از روش های دیگر مانند آنچه در ادامه می آید بتوان انتگرال پذیری را نشان داد یا آن را محاسبه کرد می توان به کمک آن وجود حد و مقدار حد مجموع های ریمان متناظر آن انتگرال را بدست آورد

$$S = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

فرض کنید می دانیم $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ روی $[0,1]$ انتگرال پذیر است و مقدار آن S می شود

$I=[0,1]$: $\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{n}{n}=1\right\}$ و $x_i^* = \frac{i}{n}$:

(افراز بازهٔ I به n زیربازهٔ مساوی) (x_i^* نقطهٔ ابتدایی بازهٔ iام)



(مجموع ریمان متناظر افراز بالا برای انتگرال داده شده)

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i^*)\,\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{i^2}{n^2}}}\cdot\frac{1}{n} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2+i^2}}$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2+i^2}} = S$$

فرض کنید تابع f روی بازه کراندار $I=[a,b]$ ، کراندار باشد.

f روی $[a,b]$ انتگرال پذیر (به معنی ریمان) است $\Longleftrightarrow$ نقاط ناپیوستگی تابع f ناچیز باشد

؟

مجموعه های متناهی ناچیز اند : $\Leftarrow$ تابع های قطعه قطعه پیوسته انتگرال پذیر اند

معنی ناچیز بودن $A\subseteq\mathbb{R}$:

اگر برای هر $\varepsilon>0$ ، بتوان A را با بازه های $I_1, I_2, I_3, \dots$ پوشاند که مجموع طول های آنها از ε کمتر باشد $\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|<\varepsilon$

(در نتیجه برای هر $\varepsilon>0$ ، طول $A\subseteq\mathbb{R}$ کمتر از ε است و به عبارت دیگر طول A برابر صفر است !!!)

* مجموعه یک نقطه ناچیز است.
* اگر $A_1, A_2, A_3, \dots$ دنباله ای از مجموعه های ناچیز باشند آنگاه $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ نیز ناچیز است
* مجموعه اعداد گویا ناچیز است.
* اعداد گنگ و کل اعداد حقیقی ناچیز نیستند.