ماتریس ها: یک ماتریس $m\times n$ یک جدول از اعداد حقیقی است.

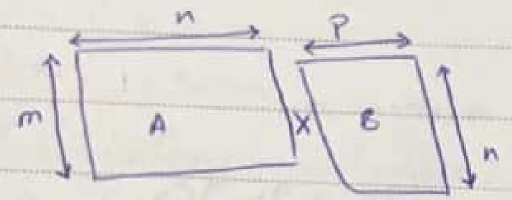
$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

a_{ij} عددی است که در نقطه سطر i ام و ستون j ام است. درایه‌ی ij ام ماتریس

* جمع ماتریس های هم اندازه انجام شدنی است و ضرب اسکالر نیز برای ماتریس‌ها برقرار است.

ضرب ماتریس ها: لازم است تعداد ستون‌های A با تعداد سطرهای B برابر باشد.

$AB=?$



$= C$ (یک ماتریس $m\times p$)

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

ویژگی های ماتریس ها:

$AB \overset{?}{=} BA$ ☹

$A(BC)=(AB)C$ ☺ $\qquad (A(BC))_{ij}=?$

$A: n\times m$
$B: m\times p$
$C: p\times r$

$$\sum_{k=1}^{m} a_{ik}(BC)_{kj}=\sum_{k=1}^{m} a_{ik}\sum_{l=1}^{p} b_{il}c_{lj}$$

$$=\underbrace{\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{p} a_{ik}b_{il}c_{lj}}$$

اگر $(AB)C$ را هم محاسبه کنیم به همان عبارت می رسیم

* $\underbrace{A}_{m\times n}\underbrace{\overset{?}{I}}_{n\times n}=A$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}I_{kj}\equiv a_{ij} \Rightarrow$$ باید برای $k\neq j$ صفر و برای $k=j$ یک باشد

Year: Month: Day: Subject:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

→ ماتریس همانی با اندازه n ⇐ ماتریس همانی در هر چه ضرب شود برابر با همان می‌شود.

مسأله: آیا ماتریس A مربعی وارون مثل B دارد که:

$AB \overset{??}{=} BA = I \qquad B = A^{-1}$

دستگاه معادلات خطی: $x_1, x_2, \dots, x_n$ مجهولات

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

* $AX \overset{?}{=} b$

$A^{-1}(AX) = A^{-1}b$

$\underbrace{(A^{-1}A)}_{I}X = A^{-1}b \qquad \boxed{X = A^{-1}b}$

* اگر $u_1, u_2, \dots, u_m \in \mathbb{R}^n$ $\boxed{\text{مستقل خطی}}$ باشند به مجموعه ترکیبات خطی آن‌ها یک زیرفضای m بعدی می‌گوییم.

یعنی هیچ‌کدام ترکیب خطی هم نباشند

$\langle u_1, \dots, u_m \rangle = \{ t_1u_1 + t_2u_2 + \cdots + t_mu_m \}$

یا

اگر $t_1, t_2, \dots, t_m$ همگی صفر نباشند $t_1u_1 + t_2u_2 + \cdots + t_mu_m \neq 0$

این دو تعریف معادل‌اند.

Scanned by CamScanner

* یک زیر مجموعه $V \subseteq \mathbb{R}^n$ را یک زیرفضای خطی می‌گوییم اگر:

$u,v \in V \Rightarrow u+v \in V$

$u \in V \Rightarrow tu \in V$

بعد V: بیشترین تعداد بردارهای مستقل در V

نگاشت خطی:

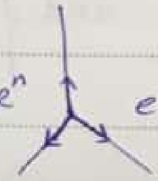
$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$f(u+v)=f(u)+f(v)$

$f(tu)=tf(u)$

$u=t_1u_1+t_2u_2+\dots+t_mu_m$

$f(u)=t_1f(u_1)+t_2f(u_2)+\dots+t_mf(u_m)$



$e_1=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} \quad \dots \quad e_n=\begin{bmatrix}0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$

$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix} \qquad x=x_1e_1+x_2e_2+\dots+x_ne_n$

$y=f(x)=x_1f(e_1)+x_2f(e_2)+\dots+x_nf(e_n)$

$y_i=x_1f(e_1)_i+\dots+x_nf(e_n)_i$

$f(e_j)_i=A_{ij}$ $\begin{bmatrix}\text{ماتریس}\\ m\times n\end{bmatrix}$ $\qquad y_i=A_{i1}x_1+\dots+A_{in}x_n=(Ax)_i$

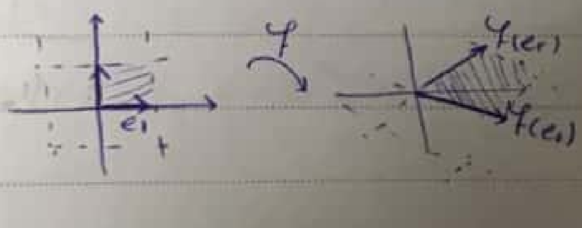
$y=f(x)=Ax \qquad A=\Big[f(e_1)\Big|\dots\Big|f(e_n)\Big]_{m\times n}$

* $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m \qquad f(x)=Ax$

$g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^p \qquad g(y)=By$

$g\circ f(x)=g(f(x))=g(Ax)=B(Ax)=(BA)x$

مثال هندسی در فضای دوبعدی:



مسأله: نگاشت خطی $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ چه برسر حجم n بعدی می آورد؟ $f(x)=AX$

جواب: حجم (n بعدی) هر شکلی در $\det A$ ضرب می‌شود.

بعد ۱: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ خطی $\quad f(x) = ax$

$[u, v] \to [au, av]$

$av - au = a(v-u)$

$\det([a]) = a$

بعد ۲: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ خطی $\quad f(x) = AX \quad A = [u|v]$

$u = f(e_1)$

$v = f(e_2)$

$u \times v = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \end{bmatrix} \quad |u\times v| = \det[u|v]$

بعد ۳:

حجم متوازی السطوح $= |u\times v| \cdot \frac{w\cdot(u\times v)}{|u\times v|}$ $\quad w\cdot\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \hline & u & \\ \hline & v & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$

* $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ = حجم n بعدی متوازی السطوح $\left(\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} \right)$

* $f, g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\quad g\circ f : BA$ $\quad \boxed{\det(BA) = \det(B)\det(A)}$ *

A B

سوال: حجم n بعدی گوی به شعاع r در فضای n بعدی چیست؟

$\underbrace{C_n}_{\text{حجم گوی واحد}} \times r^n$

$C_1 = 2$

$C_2 = \pi$

$C_3 = \frac{4}{3}\pi$