ریاضی ۱ - میرصادقی

نقطه انباشتگی است

$a \in [-\infty, \infty]$ $\lim_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$ اگر

f در a همگراست

اگر حد f موجود نباشد یا $\pm\infty$ واگراست

- حدود نامتناهی در بی‌نهایت

f برای x های به دلخواه بزرگ تعریف شده باشد

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

برای x های به اندازه کافی بزرگ، f را بتوانیم به دلخواه بزرگ کرد

$P(x) = x^n a_n + x^{n-1} a_{n-1} - - - + a_1$

$Q(x) = x^m b_m + x^{m-1} b_{m-1} + - - - + b_1$

مثال : $P(x) = a_n x^n + - - - + a_1 x + a_0$

$P(x) = x^n \left(a_n + a_{n-1}/x + - - - a_0/x^n\right)$

$\xrightarrow{x\to\infty} 0 \quad a_n \neq 0$

$$\lim_{x\to\infty} P(x)/Q(x) = \begin{cases} \infty & n > m \\ a_n/b_m & n = m \\ 0 & n < m \end{cases}$$

قاعده‌ی توان و حذف

نقش اصلی: $\longrightarrow a_n x_n$ [illegible]

غلط : $P(x) \not\xrightarrow[x\to\infty]{} a_n x^n$

$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x} - x$ $\infty - \infty$ مبهم

نکته : $0 \times \infty$ مبهم است

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x} - x)(\sqrt{x^2+x} + x)}{\sqrt{x^2+x} + x} =$$

$$\lim_{x\to\infty} x / x\sqrt{1+1/x} + x = \lim_{x\to\infty} 1/\underbrace{\sqrt{1+\underbrace{1/x}_{\to 0}}}_{\to 1} + 1 = 1/2$$

$\lim_{x\to\infty} p(x) = \lim_{x\to\infty} a_n x_n$

$\lim_{x\to\infty} p(x) \neq a_n x_n$

مجانب افقی و قائم

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \alpha \in \mathbb{R}$ $y = \alpha$ مجانب افقی

$\lim_{x\to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty$ $\alpha \in \mathbb{R}$ $x = \alpha$ مجانب قائم

## پیوستگی :

نقطه‌ی درونی دامنه : بازه‌ی بازی شامل نقطه میشود

تابعی مثل $f(x) = 1/x$ تمام نقاط دامنه درونی هستند

c نقطه درونی :

f در c پیوسته است : $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

پیوستگی یک‌طرفه : $\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$

قضیه : f وقتی در c پیوسته است که هم از چپ و هم از راست پیوسته باشد

تعریف : $f : [a,b] \xrightarrow{\text{پیوسته}} \mathbb{R}$ ↓

اگر f در همه‌ی نقاط $]a,b[$ پیوسته و در a از راست و در b از چپ پیوسته باشد.

معمولاً به چنین توابعی می‌گوییم f در a,b پیوسته است

- ترکیب دو تابع پیوسته، پیوسته است

توسیع پیوسته‌ی توابع گویا ← حذف عوامل مشترک

$$f = x^4 - 2x^3 + 2x - 1 / x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2 =$$

$$f = (x-1)^3 (x+1) / (x-1)^2 (x+2)(x+1)$$

$$\rightarrow F = x-1 / x+2$$

- قضیه‌ی ماکس - مین

اگر تابع در یک بازه‌ی بسته پیوسته باشد حداقل یک ماکسیمم و حداقل یک مینیمم دارد

مثال : حداکثر مساحت مستطیل به محیط 200 چقدر است

$2x + 2y = 200 \; : \; \max xy = ?$

$y = 100 - x \rightarrow$

$x(100 - x) = S \rightarrow 100x - x^2 =$

پیوسته روی [0,100]   با زدن عبارت $= 50^2 - (50-x)^2 \leqslant 50^2$

$\rightarrow x = 50 \Rightarrow S = 50^2$

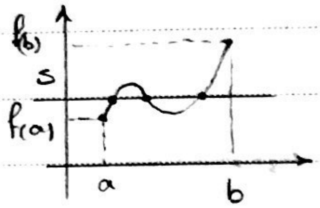
# توسیع پیوسته : تابعی که نقطه‌ی توخالی دارد را به تابعی (مشهوری) پیوسته در آن نقطه تبدیل کنیم

$f = x^2 - x / x^2 - 1 \rightarrow x = 1$ تعریف نشده

$\lim_{x \to 1} f = 1/2$   دی $\rightarrow F = x / x+1 \; , \; \begin{cases} x^2 - x / x^2 - 1 & x \neq 1 \\ 1/2 & x = 1 \end{cases}$

ریاضی ۱ - میرصادقی

- قضیه‌ی مقدار میانی ، $f:[a,b] \xrightarrow{\text{پیوسته}} \mathbb{R}$ , s بین $f(a)$ , $f(b)$ } → $\exists c \in [a,b] : f(c) = s$



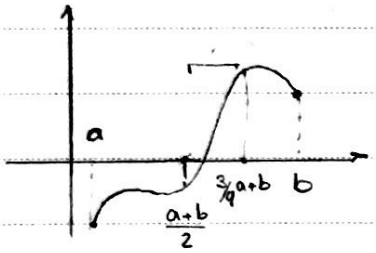
$f$ پیوسته ، $f(x_1) = f(x_2) = 0$ ، $x_1 < x_2$ } → نتیجه : f در آن بازه یا مثبت است یا منفی (بالای محور است یا پایین محور و محور را قطع نمی‌کند)

f در $]x_1, x_2[$ ریشه‌ای ندارد (*)

← یعنی بین دو ریشه‌ی متوالی علامت تغییر نمی‌کند

← در تعیین علامت یک عبارت می‌توانیم با تعیین یک نقطه در آن بازه تعیین علامت کنیم

تخمین نقطه‌ی مقدار میانی (جستجوی دودویی یا binary search)



فرض $f(a) < 0$ و $f(b) > 0$ , f پیوسته

حکم پیدا کردن ریشه

روش : ۱/ طول بازه را نصف کرده و $f(\frac{a+b}{2})$ را تعیین علامت می‌کنیم

۲/ اگر مثبت بود با $f(a)$ و اگر منفی بود با $f(b)$ آن را یک بازه می‌کنیم چون مطمئن هستیم در آن یکبار محور را قطع کرده

۳/ آنقدر این کار را تکرار می‌کنیم تا براساس قضیه‌ی تمامیت (سوراخ نداشتن خط حقیقی) به نقطه‌ی اصلی برسیم

نتیجه‌ی این روش دو دنباله است که نزدیک و نزدیک‌تر به هم می‌شوند و ریشه را می‌توانند با تقریب مناسبی تخمین بزنند

## تعریف دقیق حد (جزو امتحان نیست)

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

به حوالی خود a

$$\to \forall \varepsilon > 0 , \exists \delta > 0 \quad 0 < |x-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

مقدار دلخواه است — x به اندازه‌ی کافی به a نزدیک می‌شود — f(x) به دلخواه به L نزدیک می‌شود

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad , \lim_{x \to a} g(x) = M \quad \to \lim_{x \to a} f(x) g(x) = ?$$

$$|f(x)g(x) - LM| = |f(x)g(x) - f(x)M + f(x)M - LM| <$$

$$< |f(x)| \times |g(x) - M| + |M| \times |f(x) - L|$$

$$\delta > 0 \to |x-a| < \delta : \left[ \begin{array}{l} |f(x) - L| < \varepsilon / 2(|M|+1) , \\ |g(x) - M| < \varepsilon / 2(|L|+1) , \end{array} \right.$$

$$\underbrace{|f(x)|}_{|L|+1} \underbrace{|g(x) - M|}_{\varepsilon / 2(|L|+1)} + |M| \underbrace{|f(x) - L|}_{\varepsilon / 2(|M|+1)} < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

این عبارت نمی‌تواند بزرگ شود

ریاضی ۱ - میرصادقی

## مشتق

تمرکز بحث روی نمودار های توابع پیوسته است

### خط مماس

تعریف خط مماس غیرقائم

خارج قسمت نیوتن $= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0}$

خط مماس بر نمودار در نقطه‌ی P

$$m=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x)}{h}$$

یعنی $m(x-x_0)=y-y_0$

تعریف مماس قائم

f در $P(x_0,y_0)$ پیوسته

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\infty$$

یا

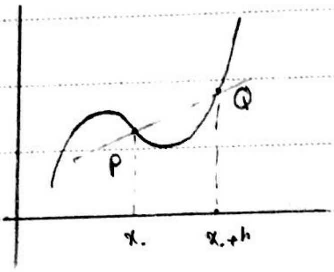
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=-\infty$$

شیب منحنی c در نقطه‌ی P، شیب خط مماس بر c در P

← به طور خاص شیب نمودار f در $(x_0, f(x_0))$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

تعریف، f بر S مشتق‌پذیر است اگر f همه‌ی نقاط S مشتق‌پذیر باشد



مثال) شیب $y=\frac{x}{3x+2}$ در $x=-2$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-2+h}{3(-2+h)+2}-\frac{2}{3(-2)+2}}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{2h-4-3h+4}{h(6h-8)}=\frac{1}{8}$$

تعریف: مشتق تابع f تابعی مانند f' که

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

در نقاطی که حد موجود و متناهی باشد

مشتق را به عنوان تابعی تعریف می‌کنیم که این حد در آن موجود و متناهی باشد

# شهودی: مشتق داشته در پیوسته: تابع در آن نقطه تیز یا خیلی عمودی نشود

مقدار شیب در تابع f می‌شود معادله تابع f'