به نام خدا

دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی اصفهان

خرداد ماه ۹۸ — آزمون پایان‌ترم درس ریاضی عمومی ۲ — مدت: ۱۵۰ دقیقه

بارم هر سوال: ۱۵ نمره

---

۱. ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x,y) = x^۲ + y^۲ + ۴x - ۴y$ را روی ناحیه $D = \{(x,y) | \quad x^۲ + y^۲ \leq ۱۸\}$ بیابید.

---

۲. انتگرال مکرّر زیر را محاسبه کنید.

$$\int_{۰}^{۱} \int_{\sin^{-۱} y}^{\frac{\pi}{۲}} \cos x \sqrt{۱ + \cos^۲ x} \; dx dy$$

---

۳. انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int\int_D \frac{x-y}{x+y} dx dy$$

که در آن D ناحیه درون مستطیلی به رئوس $(۲,۲)$، $(۱,۱)$، $(۰,۲)$ و $(۱,۳)$ است.

---

۴. انتگرال زیر را محاسبه کنید،

$$\int\int\int_D z \; dx dy dz$$

که در آن D ناحیه مشترک درون کُره‌ی $x^۲ + y^۲ + (z-۲)^۲ = ۴$ و خارج کُره‌ی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۴$ است.

---

۵. حجم درون قسمتی از هذلولی‌گونِ یکپارچه‌ی $x^۲ + y^۲ - z^۲ = ۱$، محدود بین صفحات $z = ۰$ و $z = \sqrt{۳}$ را محاسبه کنید.

---

۶. فرض کنید رویه‌ی S بخشی از نیم کره $z = \sqrt{۴ - x^۲ - y^۲}$ است که بالای صفحه $z = \sqrt{۳}$ قرار دارد.

الف) مساحت رویه S را محاسبه کنید.

ب) مطلوب است محاسبه $\int\int_S F.n \; d\sigma$ که n قائم یکه بر S در جهت مثبت محور z است و $F(x,y,z) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$.

---

۷. مطلوبست محاسبه‌ی $\oint_C (x+y) \; dx + xy \; dy$ که در آن خم بسته‌ی C متشکل از قسمتی از دایره‌ی $x^۲ + y^۲ = ۲x$ و خط $y = ۰$ واقع در ربع اول صفحه است که در جهت مثبت طی می‌شود.

---

۸. فرض کنید D ناحیه‌ی محدودشده در خارج کره‌ی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۴z$ و داخل کره‌ی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱۶$ و داخل مخروطِ $z = \sqrt{۳(x^۲ + y^۲)}$ باشد. حاصل انتگرالِ $\int\int_S F.n \; d\sigma$ را محاسبه کنید که در آن S سطح مرزی ناحیه‌ی D و n قائم یکه بر S رو به بیرون (در جهت مثبت) است و $F(x,y,z) = (۲x + e^{yz})\hat{i} + (y + \cos(z^۲))\hat{j} + z\hat{k}$ یک میدان برداری است.

موفق باشید

۱ــ ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x,y)=x^{۲}+y^{۲}+۴x-۴y$ را روی ناحیه $D=\{(x,y)\ :\ x^{۲}+y^{۲}\leq ۹\}$ بیابید. پاسخ: ابتدا نقاط بحرانی درون ناحیه D را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=۲x+۴=۰\quad\Rightarrow x=-۲$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=۲y-۴=۰\quad\Rightarrow y=۲$$

نقطه $(-۲,۲)$ درون ناحیه D تنها نقطه بحرانی است. حال نقاط اکسترمم روی مرز را پیدا می‌کنیم. راه اول: (روش لاگرانژ) اکسترمم f تحت شرط $g=x^{۲}+y^{۲}-۱۸=۰$ را پیدا می‌کنیم. (۵ نمره)

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lambda\frac{\partial g}{\partial x}\quad\Rightarrow ۲x+۴=\lambda ۲x\Rightarrow x=\frac{۲}{\lambda-۱}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=\lambda\frac{\partial g}{\partial y}\quad\Rightarrow ۲y-۴=\lambda ۲y\Rightarrow y=\frac{-۲}{\lambda-۱}$$
$$x^{۲}+y^{۲}=۱۸$$

بنابراین (۳ نمره)

$$(\lambda-۱)^{۲}=\frac{۴}{۹}\Rightarrow\lambda=\frac{۵}{۳},\frac{۱}{۳}.$$

حال داریم

$$\lambda=\frac{۵}{۳}\Rightarrow x=۳,y=-۳,$$
$$\lambda=\frac{۱}{۳}\Rightarrow x=-۳,y=۳.$$

نقاط اکسترمم مطلق در جدول زیر پیدا می‌شود. (۵ نمره)

(x,y)	$f(x,y)$	
$(-۲,۲)$	-۸	مینیمم مطلق
$(۳,-۳)$	۴۲	ماکزیمم مطلق
$(-۳,۳)$	-۶	

راه دوم: مرز را بصورت زیر پارامتری می‌کنیم: (۲ نمره)

$$x(t)=۳\sqrt{۲}\cos t,\ y(t)=۳\sqrt{۲}\sin t,\ ۰\leq t\leq ۲\pi$$

بنابراین اکسترمم تابع زیر را پیدا می‌کنیم: (۳ نمره)

$$g(t)=f(x(t),y(t))=۹+۱۲\sqrt{۲}\cos t-۱۲\sqrt{۲}\sin t.$$

$$g'(t)=-۱۲\sqrt{۲}(\sin t+\cos t)=۰\Rightarrow\tan t=-۱\Rightarrow t=\frac{۳\pi}{۴},\frac{۷\pi}{۴}.$$

(۲ نمره)

(x,y)	$f(x,y)$	
$(-۲,۲)$	-۸	مینیمم مطلق
$t=۰,۲\pi\to(۳\sqrt{۲},۰)$	$۱۸+۱۲\sqrt{۲}$	
$t=\frac{۳\pi}{۴}\to(-۳,۳)$	-۶	
$t=\frac{۷\pi}{۴}\to(۳,-۳)$	۴۲	ماکزیمم مطلق

(۵ نمره)

۲ــ مطلوبست محاسبه انتگرال مکرر زیر

$$\int_{۰}^{۱}\int_{\sin^{-۱}y}^{\frac{\pi}{۲}}\cos x\sqrt{۱+\cos^{۲}x}\,dxdy.$$

ناحیه انتگرال‌گیری به صورت زیر است

$$\begin{cases}۰\leq y\leq ۱\\ \sin^{-۱}y\leq x\leq\frac{\pi}{۲}.\end{cases}$$