مسئله. نشان دهید $Q^+=\{\frac{m}{n} \mid m,n\in \mathbb{N}\}$ شمارای نامتناهی است.

حل. فرض می‌کنیم $Q^+=\{\frac{m}{n} \mid m,n\in \mathbb{N}, (m,n)=1\}$. حال تعریف می‌کنیم

$$f: Q^+ \longrightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N}$$

$$f\left(\frac{m}{n}\right)=(m,n)$$

در این صورت به وضوح f یک به یک است. (ولی پوشا نیست) بنابراین

$$f: Q^+ \longrightarrow f(Q^+) \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$$

دوسوئی است. پس $Q^+\sim f(Q^+)$ و چون Q^+ نامتناهی است

پس $f(Q^+)$ نیز نامتناهی است. حال $f(Q^+)\subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ و $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$
شمارای نامتناهی است. پس $f(Q^+)$ شمارای نامتناهی و لذا $f(Q^+)\sim\mathbb{N}$

مسئله. نشان $Q\sim\mathbb{N}$.

حل. $Q=Q^+\cup Q^-\cup\{0\}$. از این که $Q^+\sim Q^-$ پس
Q^- شمارای نامتناهی است و لذا $Q^+\cup Q^-$ شمارای نامتناهی است.
بنابراین $Q^+\cup Q^-\cup\{0\}$ شمارای نامتناهی است. یعنی Q شمارای نامتناهی
است.

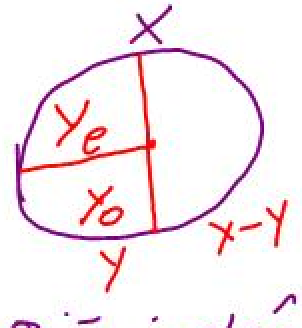
قضیه: هر مجموعه‌ی نامتناهی شامل یک زیرمجموعه‌ی شمارای نامتناهی است.

اثبات: فرض کنید X نامتناهی باشد. در این صورت $X\neq\emptyset$. پس $x_1\in X$
موجود است. از این که $\{x_1\}\sim N_1$ لذا $\{x_1\}$ متناهی است. پس $X\neq\{x_1\}$

و در نتیجه $x_2 \in X-\{x_1\}$ موجود است. با ادامه‌ی این فرایند، برای هر k، $x_k \in X-\{x_1,\dots,x_{k-1}\}$ موجود است. قرار می‌دهیم $Y=\{x_1,x_2,\dots\}$ به وضوح $Y \subseteq X$ و $\mathbb{N} \sim Y$. پس Y یک زیرمجموعه‌ی شمارای نامتناهی از X است.

مثال. نشان دهید هر مجموعه‌ی نامتناهی اجتماعی از دو مجموعه‌ی نامتناهی جدا از هم است.

حل. فرض کنید X یک مجموعه‌ی نامتناهی باشد. بنا به قضیه‌ی قبل X شامل زیرمجموعه‌ی شمارای نامتناهی Y است. می‌توان فرض کرد $Y=\{y_1,y_2,\dots\}$ قرار می‌دهیم $Y_o=\{y_1,y_3,\dots\}$ و $Y_e=\{y_2,y_4,\dots\}$. به وضوح $\mathbb{N}\sim Y_o$ و $\mathbb{N}\sim Y_e$. پس Y_o و Y_e هر دو شمارای نامتناهی و در نتیجه نامتناهی اند. حال از این که $Y'=Y_e\cup(X-Y)$ ابرمجموعه‌ی Y_e است لذا نامتناهی است. از طرفی $X=Y_e\cup Y'$. واضح است که Y_e و Y' جدا از هم می‌باشند.



یادآوری. هر مجموعه‌ی هم‌توان با $\mathbb{N}$ شمارای نامتناهی نامیده می‌شود. یک مجموعه‌ی شمارا مجموعه‌ای است که متناهی یا شمارای نامتناهی باشد. پس یک مجموعه‌ی ناشمارا مجموعه‌ای است که نامتناهی بوده و با $\mathbb{N}$ هم‌توان نباشد.

قضیه. مجموعه ی $(0,1)$ شامل تمام اعداد حقیقی x که $0<x<1$، ناشمارا است.

اثبات. فرض کنید $(0,1)$ شمارا باشد. بنابراین می توان تمام اعداد این مجموعه را توسط $\mathbb{N}$ اندیس گذاری کرد، فرض کنید $(0,1)=\{x_1,x_2,\dots\}$

هر عدد در فاصله ی $(0,1)$ دارای نمایش اعشاری به صورت $0/a_1a_2\dots$ است.

اگر عددی دارای نمایش اعشاری متناهی باشد می توان آن را با نمایش نامتناهی جایگزین کرد. به عنوان مثال، $0/2=0/1999\dots$ ، $0/378=0/37799\dots$

فرض کنید:

$$x_1=0/y_{11}y_{12}y_{13}\dots$$
$$x_2=0/y_{21}y_{22}y_{23}\dots$$
$$x_3=0/y_{31}y_{32}y_{33}\dots$$

عدد اعشاری $z=0/z_1z_2z_3\dots$ را چنان انتخاب می کنیم که $z_1\neq y_{11}$ ، $z_2\neq y_{22}$ ، $z_3\neq y_{33}$ و ....

به وضوح بنا به انتخاب، $z\neq x_1$ (چون $z_1\neq y_{11}$) به همین صورت $z\neq x_2,x_3,\dots$. پس عددی اعشاری در $(0,1)$ موجود است که در $\{x_1,x_2,\dots\}$ وجود ندارد و این تناقض است.

پس $(0,1)$ ناشمارا است.

مسئله. هر ابرمجموعه‌ی یک مجموعه‌ی ناشمارا، ناشمارا است.

اثبات: فرض کنید X یک مجموعه‌ی ناشمارا و Y ابرمجموعه‌ی آن باشد. یعنی $X \subseteq Y$.

از این که X نامتناهی است لذا Y نیز نامتناهی است.

می‌خواهیم نشان دهیم Y ناشمارا است. فرض کنید (فرض خلف) Y شمارا باشد.

از این که Y نامتناهی است، Y شمارای نامتناهی خواهد بود. چون X زیرمجموعه‌ی نامتناهی Y است، لذا X نیز شمارای نامتناهی است که با فرض در تناقض است.

بنابراین Y ناشمارا است.

مثال: $\mathbb{R}$ ناشمارا است.

دلیل. $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$. از این که $(0,1)$ ناشمارا است لذا $\mathbb{R}$ نیز ناشمارا خواهد بود.

مسئله. هر مجموعه‌ی هم‌توان با یک مجموعه‌ی ناشمارا، ناشمارا است.

حل. فرض کنید X ناشمارا بوده و $Y \sim X$. ادعا می‌کنیم Y ناشمارا است، در غیر این صورت (فرض خلف) Y شمارا خواهد بود، پس Y یا متناهی است و یا شمارای نامتناهی و در هر حال از این که $Y \sim X$، X نیز شمارا خواهد بود که تناقض است. پس Y نیز ناشمارا است.

مثال. اگر $a<b$ آنگاه (a,b) ناشمارا است.

اثبات. $(0,1) \sim (a,b)$، حال از این که $(0,1)$ ناشمارا است لذا (a,b) نیز چنین است.

مثال. $(5,7]$ ناشمارا است.

دلیل. $(5,7) \sim (0,1)$. بنابراین $(5,7)$ ناشمارا است. از طرفی $(5,7) \subseteq (5,7]$. بنابراین $(5,7]$ نیز ناشمارا خواهد بود.

مسأله. مجموعه‌ی $\mathbb{Q}^c = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ناشمارا است.

حل. فرض کنید $\mathbb{Q}^c$ شمارا باشد. بنابراین شمارای نامتناهی خواهد بود. از طرفی $\mathbb{Q}$ (مجموعه‌ی اعداد گویا) نیز شمارای نامتناهی است، پس اجتماعشان یعنی $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c$ شمارای نامتناهی خواهد بود که تناقض است. پس $\mathbb{Q}^c$ ناشمارا است.

فصل ۶. حساب اعداد اصلی.

می‌دانیم هر عدد طبیعی n مرتبه‌ی یک مجموعه است. عدد صفر نیز این خاصیت را دارد. در واقع صفر مرتبه‌ی مجموعه‌ی تهی است.

یک عدد اصلی به نوعی تعمیم مرتبه است. به عبارت دیگر به هر مجموعه‌ی A اعم از متناهی یا نامتناهی می‌توان یک عدد اصلی a متناظر کرد. در چنین حالتی a را عدد اصلی یا کاردینال A نامیده می‌نویسیم $a = \text{card}(A)$.

بعلاوه اصول موضوعه‌ی زیر را فرض می‌گیریم.

① به هر مجموعه‌ی A یک عدد اصلی a متناظر است.

② $\text{card}\, A = 0$ اگر و تنها اگر $A = \emptyset$

۳) اگر $A\neq\emptyset$ متناهی باشد آنگاه به ازای یک k، $A\sim N_k=\{1,2,\ldots,k\}$

در این صورت $card(A)=k$.

۴) برای هر دو مجموعه A و B، $card(A)=card(B)$ اگر و تنها اگر $A\sim B$.

نمادگذاری. قرار می‌دهیم $\aleph_0=card(\mathbb{N})$ و $c=card(\mathbb{R})$.

از این که $\mathbb{N}$ شمارا و $\mathbb{R}$ ناشمارا است لذا $\mathbb{R}\not\sim\mathbb{N}$ و در نتیجه بنا بر اصل موضوع

۴) $\aleph_0\neq c$.

مثال. اگر X شمارای نامتناهی باشد آنگاه $\mathbb{N}\sim X$ و لذا $card(X)=\aleph_0$.

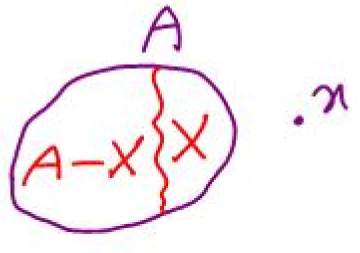
مسئله. فرض کنید A یک مجموعه نامتناهی باشد و $x\notin A$. در این صورت

$card(A\cup\{x\})=card(A)$.

حل. از این که A نامتناهی است لذا شامل زیرمجموعه شمارای نامتناهی مانند X است.

در مسئله‌ای از قبل نشان دادیم اگر $x\notin X$ آنگاه $X\sim X\cup\{x\}$ اکنون

$$X\sim X\cup\{x\}$$
$$A-X\sim A-X$$



$$\underbrace{(A-X)\cup X}_{A}\sim\underbrace{(A-X)\cup(X\cup\{x\})}_{A\cup\{x\}}\longrightarrow A\sim A\cup\{x\}$$

توجه کنید $X\cap(A-X)=\emptyset$ و $(X\cup\{x\})\cap(A-X)=\emptyset$

ترتیب در اعداد اصلی

مجموعه های $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{1,2,3,4,5\}$ را در نظر بگیرید. به وضوح $A\subseteq B$ بنابراین $|A|\le|B|$.

سؤالی که مطرح است این است که برای برقراری $|A|\le|B|$ آیا لازم است $A\subseteq B$؟ جواب منفی است. برای این منظور $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{4,5,6,7,8\}$ را در نظر بگیرید. به راحتی می‌توان دید $A\not\subseteq B$ در حالیکه $|A|=3\le 5=|B|$.

$$A=\{1,2,3\}$$

$$B=\{\underbrace{4,5,6}_{A'},7,8\}$$

چنانچه $A'=\{4,5,6\}$ آنگاه $A\sim A'\subseteq B$.

تعریف. فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. در این صورت گوییم $\operatorname{Card} A\le \operatorname{Card} B$ هرگاه A با زیرمجموعه‌ای از B هم‌توان باشد. به عبارت دیگر $A'\subseteq B$ چنان موجود باشد که $A\sim A'$.

چنانچه $\operatorname{Card} A\le \operatorname{Card} B$ آنگاه $A'\subseteq B$ وجود دارد که $A\sim A'$. فرض کنید $f:A\to A'$ تابعی دوسوئی باشد. در این صورت $f:A\to B$ یک به یک است.

پس $\operatorname{Card} A\le \operatorname{Card} B$ هرگاه تابع یک به یک $f:A\to B$ موجود باشد.

مثال. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$. پس $\operatorname{card}\mathbb{N} \leqslant \operatorname{card}\mathbb{R}$. یعنی $\aleph_0 \leqslant c$.

تعریف. گوئیم $\operatorname{card}A < \operatorname{card}B$ هرگاه $\operatorname{card}A \leqslant \operatorname{card}B$ و $\operatorname{card}A \neq \operatorname{card}B$

مثال. قبلاً نشان دادیم که $\mathbb{R}$ ناشماراست. پس $\mathbb{N} \not\approx \mathbb{R}$ و لذا $\aleph_0 \neq c$.

از طرفی بنا به مثال قبل ، $\aleph_0 \leqslant c$. بنابراین $\aleph_0 < c$.

سؤال. آیا عددی اصلی بین $\aleph_0$ و c موجود است؟

قضیه‌ی شرودر - برنشتاین

اگر A و B دو مجموعه باشند که $\operatorname{card}A \leqslant \operatorname{card}B$ و $\operatorname{card}B \leqslant \operatorname{card}A$ آنگاه $\operatorname{card}A = \operatorname{card}B$ ،

به عبارت دیگر اگر α و β دو عدد اصلی باشند و $\alpha \leqslant \beta$ و $\beta \leqslant \alpha$ آنگاه $\alpha = \beta$.

عدد اصلی مجموعه‌ی توانی

قضیه. فرض کنید X مجموعه‌ای دلخواه باشد و $P(X)$ مجموعه‌ی توانی X باشد. در این صورت $\operatorname{card}X < \operatorname{card}P(X)$.

اثبات ، ابتدا فرض کنید $X = \varnothing$. در این صورت بوضوح $P(X) = P(\varnothing) = \{\varnothing\}$

بنابراین $\operatorname{card}X = \operatorname{card}\varnothing = 0 < 1 = \operatorname{card}P(\varnothing)$

پس فرض می‌کنیم $X \neq \varnothing$.

تعریف می‌کنیم

$$\varphi : X \longrightarrow P(X)$$
$$x \rightsquigarrow \{x\}$$

به وضوح φ تابعی یک به یک است. پس $\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} P(X)$.

حال می‌خواهیم نشان دهیم $\operatorname{card} X \neq \operatorname{card} P(X)$.

فرض کنید (فرض خلف) $\operatorname{card} X = \operatorname{card} P(X)$. بنابراین تابعی دوسویی مانند $f : X \longrightarrow P(X)$ موجود است. حال تعریف می‌کنیم:

$$S = \{ x \in X \mid x \notin f(x) \} \subseteq X$$

پس $S \in P(X)$. حال از اینکه f پوشاست لذا $e \in X$ موجود است که $f(e) = S$.

$$e \in S \xrightarrow{\text{بنا به تعریف } S} e \notin f(e) \to e \notin S$$
$$e \notin S \xrightarrow{\text{بنا به تعریف } S} e \in f(e) \to e \in S$$
$$\gg \times$$

پس چنین f موجود نیست و لذا $\operatorname{card} X \neq \operatorname{card} P(X)$. پس $\operatorname{card} X < \operatorname{card} P(X)$.

جمع اعداد اصلی.

تعریف. فرض کنید x و y دو عدد اصلی باشند. در این صورت مجموعه‌های X و Y را

چنان موجودند که $\text{card}\, X = x$ و $\text{card}\, Y = y$. می‌توان فرض کرد $X \cap Y = \emptyset$. در این صورت تعریف می‌کنیم $x + y = \text{card}(X \cup Y)$.

نکته ۱. چگونه می‌توان فرض کرد $X \cap Y = \emptyset$ ؟

سبک پاسخگویی به سؤال بالا: فرض کنید $x = \text{card}\, X$ و $y = \text{card}\, Y$. در این صورت به وضوح $X \sim \underbrace{X \times \{1\}}_{X'}$ و $Y \sim \underbrace{Y \times \{2\}}_{Y'}$.

در چنین حالتی $X \sim X'$ و $Y \sim Y'$ و البته $X' \cap Y' = \emptyset$.

نکته ۲. (خوش تعریفی جمع) فرض کنید X و Y دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند به طوری که $\text{card}\, X = x$ و $\text{card}\, Y = y$

همچنین فرض کنید X' و Y' نیز دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند که $\text{card}\, X' = x$ و $\text{card}\, Y' = y$. در این صورت:

$$\text{card}\, X = x = \text{card}\, X' \longrightarrow X \sim X'$$
$$\text{card}\, Y = y = \text{card}\, Y' \longrightarrow Y \sim Y'$$
$$\frac{X \cap Y = \emptyset = X' \cap Y'}{X \cup Y \sim X' \cup Y'}$$

بنابراین $\text{card}(X \cup Y) = \text{card}(X' \cup Y')$ یعنی جمع اعداد اصلی خوش تعریف است.

مثال: $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$

$$\mathbb{N}_e \cup \mathbb{N}_o = \mathbb{N} \rightarrow \operatorname{card}(\mathbb{N}_e \cup \mathbb{N}_o) = \operatorname{card}\mathbb{N}$$

حال از این که $\mathbb{N}_e \cap \mathbb{N}_o = \emptyset$ لذا $\operatorname{card}(\mathbb{N}_o \cup \mathbb{N}_e) = \operatorname{card}\mathbb{N}_o + \operatorname{card}\mathbb{N}_e$

پس $\operatorname{card}(\mathbb{N}_o) + \operatorname{card}(\mathbb{N}_e) = \operatorname{card}(\mathbb{N})$ یعنی $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$

مثال: فرض کنید α یک عدد اصلی نامتناهی باشد. در این صورت $\alpha+1=\alpha$.

زیرا فرض کنید مجموعه‌ی A چنان باشد که $\operatorname{card} A = \alpha$ و $x \notin A$.

در مسئله‌ای از قبل ثابت کردیم که $A \cup \{x\} \sim A$. بنابراین

$\operatorname{card}(A \cup \{x\}) = \operatorname{card} A$. یعنی $\alpha+1=\alpha$.

نتیجه. اگر k یک عدد اصلی متناهی و α یک عدد اصلی ترامتناهی باشد آنگاه $\alpha+k=\alpha$.

مسئله. نشان دهید $c+c=c$

حل:

$$(0,1) \subseteq (0,1) \cup (1,2)$$

$$\longrightarrow \operatorname{card}(0,1) \leqslant \operatorname{card}\big((0,1)\cup(1,2)\big)$$

$$\longrightarrow c \leqslant c+c \quad (1)$$

$$(0,1)\cup(1,2) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \operatorname{card}\big((0,1)\cup(1,2)\big) \leqslant \operatorname{card}\mathbb{R}$$

$$\longrightarrow c+c \leqslant c \quad (2)$$