تمرین‌های ریاضی عمومی ۱
(سری پنجم)

۸ اردیبهشت ۱۳۹۸

تمرین ۱: حاصل حدهای زیر را به‌دست آورید:

الف) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\frac{1}{(n+1)^3}+\frac{1}{(n+2)^3}+\cdots+\frac{1}{(2n)^3}\right)$

ب) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$

تمرین ۲: فرض کنید f و g دو تابع پیوسته روی $[a,b]$ باشند که $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$. ثابت کنید $c\in[a,b]$ موجود است که $f(c)=g(c)$.

تمرین ۳: فرض کنید f و g بر $[a,b]$ پیوسته بوده و g بر این بازه تغییر علامت ندهد.

الف) نشان دهید نقطه‌ای مانند $c\in[a,b]$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

ب) مطلوب است تعیین نقطه c در فرمول فوق به‌نحوی‌که

$$a=0,\quad b=\pi/2,\quad f(x)=\sin x,\quad g(x)=\cos x.$$

تمرین ۴:

الف) فرض کنید $f(x)\geq 0$ یک تابع صعودی پیوسته روی $[1,\infty)$ است. نشان دهید:

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k)\leq\int_1^n f(x)dx\leq\sum_{k=2}^{n} f(k)$$

ب) اگر $f(x)=\ln x$ نامساوی زیر را نتیجه بگیرید:

$$n^n e^{-n+1}\leq n!\leq(n+1)^{(n+1)}e^{-n}$$

تمرین ۵: فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ یک تابع پیوسته باشد. برای هر $x\in\mathbb{R}$ قرار می‌دهیم:

$$g(x)=f(x)\int_0^x f(t)dt.$$

نشان دهید اگر g تابعی نزولی باشد، در این‌صورت f تابع صفر است.

تمرین ۶: تابع F روی اعداد حقیقی به صورت زیر تعریف شده است:

$$F(x) = \int_0^{2x-x^2} \cos(\frac{1}{1+t^2})dt.$$

ماکزیمم و مینیمم F را تعیین کنید.

تمرین ۷: می‌دانیم تابع $f(x) = 1/x^2$ روی دامنه‌اش پیوسته و مثبت است. بنابراین انتگرال آن روی هر بازه دلخواه از دامنه، مقداری نامنفی خواهد بود. از طرفی، با استفاده از قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال مشاهده می‌کنیم که

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}dx = \frac{-1}{x}\Big|_{x=-1}^{x=1} = -2.$$

دلیل این تناقض را بیان کنید.

سری پنجم

① $\rightarrow \frac{1}{n}\left(\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^3}+\frac{1}{(1+\frac{2}{n})^3}+\dots+\frac{1}{(1+\frac{n}{n})^3}\right) \rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^3}$

$\rightarrow = -\frac{1}{2}(1+x)^{-2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}$

یادم:

$\frac{1}{n}\sum_1^n f\left(\frac{k}{n}\right) \rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx$

تابع همسو:

$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n} \rightarrow \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\dots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right) \rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \underline{\ln 2}$

نکته:

$$\begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 1 \\ f-g \rightarrow 0 \end{cases}, \quad fh \simeq gh \;\Rightarrow\; fh = \frac{f}{g}hg = \underline{gh}$$

تابع هم‌ارز:

$\sin x \sim x \rightarrow \frac{\sin x}{x} \rightarrow 1 \;,\; \sin x - x \rightarrow 0$

$\cos x \sim 1-\frac{x^2}{2} \rightarrow \frac{\cos x}{1-\frac{x^2}{2}} \rightarrow 1 \;,\; \cos x + \frac{x^2}{2} - 1 \rightarrow 0$

مثال:

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n} \rightarrow \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\frac{1}{n}}+\frac{1}{\frac{2}{n}}+\dots+\frac{1}{\frac{n}{n}}\right)$

$\rightarrow \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big|_0^1 = \underline{\infty}$

② مقدار میانگین

$\rightarrow \int_a^b f-g = 0 = (b-a)(f-g)_{(c)} \rightarrow (f-g)(c) = 0$

$\rightarrow f(c) = g(c)$

③ روی ادامه

$\int g = 1 \rightarrow$ وزن‌ها $\left(\frac{1}{2}p_1+\frac{1}{4}p_2+\frac{1}{4}p_3\right)$

$\int g \neq 1 \rightarrow h(x) = \frac{g(x)}{\int g} \Rightarrow \int h = 1 \rightarrow \int f(x)h(x)\,dx = f(c)$