بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

امتحان میان‌ترم معادلات دیفرانسیل

۲۲−۰۳۴ (گروه‌های ۱ تا ۱۲)

نیمسال دوم ۸۵−۸۴

مدّت امتحان: ۲ ساعت و نیم

پنجشنبه ۸۵/۱/۳۱

سؤال ۱. جواب عمومیِ معادلهٔ دیفرانسیل زیر را به‌دست آورید.

$$y' + \frac{1}{x\ln x}\, y = 3x^{2} \qquad (x > 0,\ x \neq 1)$$

سؤال ۲. جواب عمومیِ معادلهٔ دیفرانسیلِ برنولی زیر را به‌دست آورید.

$$y' - y + xe^{-2x}y^{3} = 0$$

سؤال ۳. تمام توابع مشتق‌پذیر $y : [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}] \longrightarrow [-1, 1]$ را که در معادلهٔ زیر صدق می‌کنند پیدا کنید.

$$y(x) + \int_{0}^{x} \frac{y(t) + 9}{y(t) + 2t + 3}\, dt = 0$$

سؤال ۴. اگر $a \neq 0$ و b اعداد حقیقی باشند، جواب عمومیِ معادلهٔ دیفرانسیل زیر را به‌دست آورید.

$$y'' + a^{2}y = \sin bx$$

سؤال ۵. فرض کنید a، b و c اعداد حقیقی مثبت باشند. اگر $y = y(x)$ جواب دلخواهی از معادلهٔ دیفرانسیل $ay'' + by' + cy = 0$ باشد، نشان دهید $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0$.

سؤال ۶. فرض کنید p و q دو تابع حقیقی (نه لزوماً پیوسته) روی بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ باشند با این ویژگی که برای هر $x \in [a, b]$، $q(x) < 0$. نشان دهید $y = 0$ تنها جواب مسألهٔ مقدار مرزی زیر است.

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases}$$

(راهنمایی: اگر $y = y(x)$ جواب دلخواهی از مسأله باشد، از اینکه y ماکزیمم مطلق یا مینیمم مطلق خود را در $[a, b]$ اختیار می‌کند استفاده کنید و سپس آزمون مشتق دوم را به‌کار گیرید.)

توزیع نمره: سؤال‌های ۱، ۲، ۵ و ۶: ۱۵ نمره، سؤال‌های ۳ و ۴: ۲۰ نمره.

مجموع: ۱۰۰ نمره.

بسمه تعالی

تاریخ ۸۵/۱/۳۱

شماره ....

پیوست ....

دانشگاه صنعتی شریف

حل مسایل امتحان میان‌ترم معادلات دیفرانسیل (گروه‌های ۱ تا ۱۲)

سؤال ۱: $\exp\left(\int_e^x \frac{d\xi}{\xi \ln \xi}\right) = \exp(\ln|\ln x|) = |\ln x|$ عامل انتگرال‌ساز معادله می‌باشد، لذا با ضرب طرفین معادله در $\ln x$ به دست می‌آوریم $y'\ln x + \frac{1}{x}y = 3x^2 \ln x$ یا $(y \ln x)' = (x^3)'\ln x$. انتگرال‌گیری از طرفین تساوی اخیر نتیجه می‌دهد که $y\ln x = x^3\ln x - \int x^2 dx$ یا $y\ln x = x^3\ln x - \frac{1}{3}x^3 + C$ که در آن $C \in \mathbb{R}$ ثابت دلخواهی است. پس جواب عمومی معادله به صورت

$$y = x^3 + \left(C - \frac{1}{3}x^3\right)/\ln x$$

به دست می‌آید. □

سؤال ۲: با ضرب طرفین معادله در $-2y^{-3}e^{2x}$ به دست می‌آوریم $-2y^{-3}y'e^{2x} + 2y^{-2}e^{2x} = 2x$. تغییر متغیر $u = y^{-2}$ نتیجه می‌دهد $u' = -2y^{-3}y'$، لذا معادله به صورت $u'e^{2x} + 2ue^{2x} = 2x$ یا $(ue^{2x})' = 2x$ تبدیل می‌شود. انتگرال‌گیری از طرفین تساوی اخیر نتیجه می‌دهد که $ue^{2x} = x^2 + C$ که در آن $C \in \mathbb{R}$ ثابت دلخواهی است. در نتیجه $y^{-2}e^{2x} = x^2 + C$ یا $y^{-1}e^{x} = \pm\sqrt{x^2+C}$. پس جواب عمومی معادله به صورت

$$y = \pm e^x / \sqrt{x^2+C}$$

به دست می‌آید. □

سؤال ۳: فرض کنید $y: [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \to [-1, 1]$ تابع مشتق‌پذیر دلخواهی باشد که در معادلهٔ انتگرال داده شده صدق می‌کند. چون نمودار y در داخل مستطیل $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-1, 1]$ قرار دارد، لذا خط $y + 2t + 3 = 0$ را قطع نمی‌کند و در نتیجه تابع زیر انتگرال تابعی پیوسته است. پس بنابر قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال به دست می‌آوریم

$$\frac{dy(x)}{dx} + \frac{y(x)+9}{y(x)+2x+3} = 0.$$

از طرفی لزوماً $y(0) = 0$. پس چنین y ای بایستی جواب مسألهٔ مقدار اولیهٔ زیر باشد که بنابر قضیهٔ وجود و یگانگی منحصربه‌فرد است.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y+9}{2x+y+3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

اما معادلهٔ دیفرانسیل متناظر با مسألهٔ مقدار اولیهٔ بالا، یعنی $(y+9)\,dx + (2x+y+3)\,dy = 0$، مثال صفحهٔ ۴۷ کتاب درسی می‌باشد که با تغییر متغیرهای $u = x - 3$ و $v = 2x + y + 3$ حل می‌شود و برای آن جواب عمومی $(y+9)^2(3x+y) = C$ به دست می‌آید. شرط $y(0) = 0$ ایجاب می‌کند که $C = 0$ ولذا جواب منحصربه‌فرد سؤال در تساوی $(y+9)^2(3x+y) = 0$ صدق می‌کند و چون $y \neq -9$، لذا لزوماً $y = -3x$ جواب خواهد بود. پس یگانه تابع مشتق‌پذیر $y: [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \to [-1, 1]$ که در معادلهٔ انتگرال داده شده صدق می‌کند $y = -3x$ است. □

سؤال ۴: معادلهٔ دیفرانسیل همگن متناظر با معادلهٔ دیفرانسیل داده شده $y'' + a^2 y = 0$ می‌باشد که معادلهٔ مشخصه‌ای به شکل $r^2 + a^2 = 0$ با ریشه‌های ia و $-ia$ دارد. پس جواب‌های مستقل خطی معادلهٔ دیفرانسیل همگن متناظر $\cos ax$ و $\sin ax$ می‌باشند. برای یافتن جواب خصوصی معادله نیز توجه می‌کنیم که اگر $a \neq \pm b$، آنگاه $y = k\cos bx + l\sin bx$ کاندیدی برای جواب است که با جایگذاری در معادله به دست می‌آید $k = 0$ و $l = 1/(a^2 - b^2)$. همچنین اگر $a = \pm b$، آنگاه کاندید مناسب برای جواب $y = x(k'\cos bx + l'\sin bx)$