② روش تکرار تابعی (نقطه ثابت):

فرض کنید $f$ در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و $f(a)f(b)<0$ باشد برای تعیین ریشه معادله $f(x)=0$

ابتدا این معادله را به شکل $x=g(x)$ تغییر داده و سپس با انتخاب $x_0\in(a,b)$ دنباله $\{x_n\}$

را از رابطه زیر بدست می‌آوریم.

$x_0$

$x_1=g(x_0) \quad x_2=g(x_1) \quad x_3=g(x_2) \quad \dots$

حال اگر $g(x)$ به طور مناسب انتخاب شده باشد آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\alpha$ که $f(\alpha)=0$ می‌باشد

مثال: برای تابع $f(x)=x^2+x-1$ توابع $g(x)$ مختلفی را تعیین کنید که $x=g(x)$ شود؟

$x^2+x-1=0 \quad x=1-x^2 \quad g(x)=1-x^2$

$\hookrightarrow x(x+1)=1 \quad x=\frac{1}{x+1} \quad g(x)=\frac{1}{x+1}$

$\hookrightarrow x+1=\frac{1}{x} \quad x=\frac{1}{x}-1 \quad g(x)=\frac{1-x}{x}$

$\hookrightarrow x^2=1-x \quad x=\pm\sqrt{1-x}$

قضیه: اگر $f(x)=0$ در بازه‌ی $[a,b]$ دارای ریشه‌ی منحصر بفرد باشد و $f(x)=0$ را به

$x=g(x)$ تبدیل کرده باشیم، $x=g(x)$ دارای ریشه‌ی منحصر بفرد $f$ است هرگاه:

① $g:[a,b]\to[a,b]$

② $\forall x\in[a,b] \quad |g'(x)|\leq k<1$

نتیجه: $g(x)$ روش نقطه ثابت مناسب است هرگاه دارای دو شرط زیر باشد.

① $a\leq x\leq b \Longrightarrow a\leq g(x)\leq b$

② $a\leq x\leq b \Longrightarrow |g'(x)|\leq k<1$

۲۱ پنجشنبه
۱۰ / جمادی‌الثانی / ۱۴۳۵
فروردین 2014 / April / 10

مثال: ریشه‌ی تقریبی تابع $۳xe^{x}=۱$ را به روش نقطه ثابت با دقت سه رقم بعد از اعشار در بازه‌ی $[۰و۱]$ و فرض $x_0=۰/۵$ بیابید.

$$۳xe^{x}=۱ \quad x=\frac{e^{-x}}{۳} \Rightarrow g(x)=\frac{e^{-x}}{۳}$$

شرط اول $۰\leq x\leq ۱ \xrightarrow{\times(-۱)} -۱\leq -x\leq ۰ \xrightarrow[\text{ترکیب}]{e^{x}} e^{-۱}\leq e^{-x}\leq e^{۰} \quad \frac{۱}{۳e}\leq\frac{e^{-x}}{۳}\leq\frac{۱}{۳}$

$$۰<\frac{۱}{۳e}\leq\frac{e^{-x}}{۳}\leq\frac{۱}{۳}<۱ \longrightarrow ۰\leq g(x)\leq ۱$$

شرط اول برقرار است.

$$g'(x)=-\frac{e^{-x}}{۳} \qquad |g'(x)|=\frac{e^{-x}}{۳}$$

طبق حالت قبل $۰\leq x\leq ۱$ $\quad \frac{۱}{۳e}<\frac{e^{-x}}{۳}<\frac{۱}{۳} \Rightarrow |g'(x)|\leq\frac{۱}{۳}<۱$

شرط دوم نیز برقرار است.

$x_0=۰/۵$

شهادت امیر سپهبد علی صیاد شیرازی (۱۳۷۸ هـ ش)

$$x_1=g(x_0)=\frac{e^{-۰/۵}}{۳}=۰/۲۰۲۲$$

$$x_2=g(x_1)=\frac{e^{-۰/۲۰۲۲}}{۳}=۰/۲۷۲۳$$

۲۲ جمعه
۱۱ / جمادی‌الثانی / ۱۴۳۵
فروردین 2014 / April / 11

$$x_3=g(x_2)=\frac{e^{-۰/۲۷۲۳}}{۳}=۰/۲۵۳۹$$

$x_4=۰/۲۵۸۹ \qquad x_5=۰/۲۵۷۴$

$$\left.\begin{array}{l} x_6=۰/۲۵۷۷ \\ x_7=۰/۲۵۷۶ \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha\simeq ۰/۲۵۸$$

معیار توقف برقرار است

مثال

$$۳x^{۲}-e^{x}=۰ \Longrightarrow x=\mp\sqrt{\frac{e^{x}}{۳}} \Rightarrow \begin{cases} g(x)=\sqrt{\frac{e^{x}}{۳}} & \text{ریشه مثبت} \\ g(x)=-\sqrt{\frac{e^{x}}{۳}} & \text{ریشه منفی} \end{cases}$$

$$x^{۳}+x^{۲}-۱=۰ \qquad x^{۲}(x+۱)=۱ \qquad x=\pm\frac{۱}{\sqrt{x+۱}} \Rightarrow \begin{cases} g(x)=\frac{۱}{\sqrt{x+۱}} & \text{ریشه مثبت} \\ g(x)=\frac{-۱}{\sqrt{x+۱}} & \text{ریشه منفی} \end{cases}$$

**روش های عددی برای حل دستگاه های معادلات :**

در حالت کلی یک دستگاه n معادله ، n مجهول خطی به شرح زیر می باشد :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

معمولاً این دستگاه را به فرم ماتریسی $Ax = b$ نمایش می دهیم که در آن $A$ ماتریس ضرایب $X$ بردار مجهولات ، $b$ بردار معلوم سمت راست نامیده می شود و داریم :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} ; \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad ; \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

**قضیه :** دستگاه معادلات خطی $Ax=b$ دارای جواب منحصربفرد است اگر و تنها اگر $\det(A) \neq 0$ باشد اگر $\det(A)=0$ یا دستگاه جواب ندارد یا بی شمار جواب دارد.

**روش کرامر برای حل دستگاه های خطی :**

در این روش هر یک از $x_i$ ها را از رابطه $x_i = \dfrac{\det(A_i)}{\det(A)}$ برای $i = 1, 2, \dots, n$ بدست می آوریم که در آن $A_i$ همان ماتریس $A$ است که به جای ستون $i$ ام آن بردار $b$ قرار گرفته است .

اگر تعداد مجهولات زیاد شود روش کرامر توصیه نمی گردد .