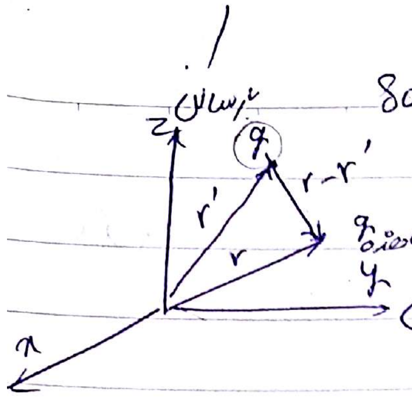


میدان الکتریکی اشیا نقطه

$$dE = \frac{dq\,|r-r'|}{4\pi\varepsilon_0\,|r-r'|^3}$$

$$E = \int \frac{dq\,(r-r')}{4\pi\varepsilon_0\,|r-r'|^3} \longrightarrow \text{قانون کولن (تکمیلی)}$$

توزیع بار: استدلال گرفتن از این بردار میدان الکتریکی است (خطی)

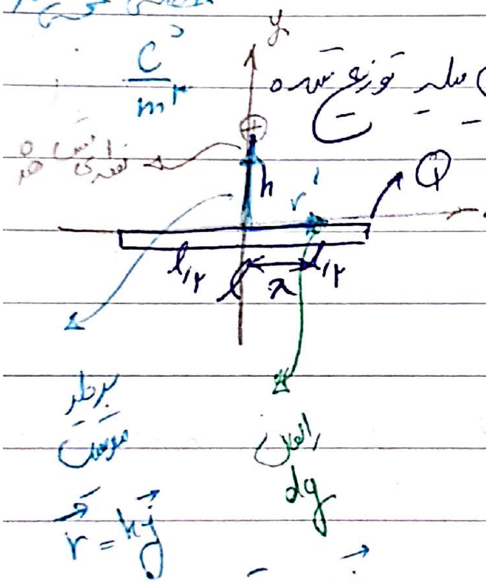
$\frac{C}{m}$ چگالی خطی بار

$dq \begin{cases} \lambda\, dl & \text{توزیع بار خطی (تک‌بعدی)} \\ \sigma\, ds & \text{سطحی (دو بعدی)} \\ \rho\, dv & \text{حجمی (سه بعدی)} \end{cases}$

$\frac{C}{m^2}$ چگالی سطحی

$\frac{C}{m^3}$ چگالی حجمی بار

یک میله‌ای با بار طول L داریم. فرض کنیم بار q به طور یکنواخت روی این میله توزیع شده



$\lambda = \frac{Q}{L}$ → چون به طور یکنواخت توزیع شده.

$dq = \lambda\, dl \qquad \vec{r}-\vec{r}' = x\hat{i} + h\hat{j}$

$|r-r'| = \sqrt{x^2+h^2}$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-l/2}^{l/2} \frac{\lambda\, dl\,(-x\hat{i}+h\hat{j})}{(x^2+h^2)^{3/2}}$$

$dq = \lambda\, dx$

$$\vec{E} = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\hat{i}\underbrace{\int_{-l/2}^{l/2} \frac{x\,dx}{(x^2+h^2)^{3/2}}}_{=\,0\ \text{فرد}} + \frac{\lambda h}{4\pi\varepsilon_0}\hat{j}\int_{-l/2}^{l/2}\frac{dx}{(x^2+h^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\lambda h}{4\pi\varepsilon_0}\hat{j}\int_{-l/2}^{l/2}\frac{dx}{(x^2+h^2)^{3/2}}$$

$\Rightarrow$

$$\int \frac{dx}{(x^2+h^2)^{3/2}} = \int \frac{h\cdot \sec^2 u \, du}{h^3 \sec^3 u} = \frac{1}{h^2}\int \frac{du}{\sec u} = \frac{1}{h^2}\int \cos u \, du$$

$\boxed{x = h \tan u}$

از روی مثلث تعیین شود

$$= \frac{1}{h^2} \frac{\tan u}{\sqrt{1+\tan^2 u}} = \frac{1}{h^2} \frac{x/h}{\sqrt{1+x^2/h^2}} = \frac{1}{h^2} \frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda h}{4\pi\varepsilon_0}\hat{j}\, \frac{1}{h^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}\Bigg|_{-l/2}^{l/2} = \frac{\lambda h}{4\pi\varepsilon_0}\hat{j}\,\frac{1}{h^2} = \frac{l/2}{\sqrt{l^2/4+h^2}} \Rightarrow$$

$$E_y = \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 h}\frac{L}{\sqrt{l^2+4h^2}}\hat{j}$$

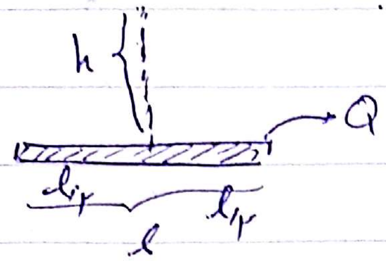
$\boxed{\lambda l = Q}$

$\cancel{E = E_y} =$

حالت خاص: طول میله تا اندازه خیلی زیاد شود.

$$E = E_y = \lim_{L\to\infty} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 h}\frac{L}{\sqrt{l^2+4h^2}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 h}$$

در مبحث قانون گاوس این حالت خاص 1 مجدداً محاسبه خواهیم کرد.



حالت خاص دوم: نقاطی مشاهده خیلی دور است

(تقریب زدن) $h \gg L \longrightarrow 2h \gg l \longrightarrow \frac{l}{2h} \leq 1 \longrightarrow \frac{l^2}{4h^2} \leq 1$

$h > 10l$

$$E = E_y = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 h}\,\frac{l}{\sqrt{l^2+4h^2}} = \frac{\overset{Q}{\lambda l}}{2\pi\varepsilon_0 h(2h)}\left(1+\frac{l^2}{4h^2}\right)^{-1/2}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 h^2}\left(1+\frac{l^2}{4h^2}\right)^{-1/2}$$

بسط $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots$

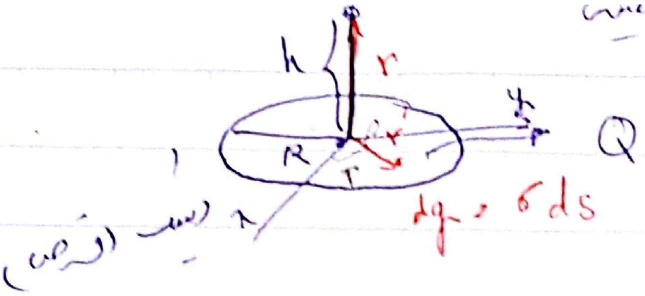
$|x| < 1$

$$\Rightarrow E = E_y = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 h^2}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{l^2}{4h^2}\right) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}\left(\frac{l^2}{4h^2}\right)^2 + \cdots\right]$$

$$E = E_y \simeq \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 h^2}$$

ابعاد یک بار محدود با ابعاد محدود در نقاط دوردست مانند یک

بار نقطه‌ای عمل می‌کند (پتانسیل الکتریکی استفاده می‌شود)



$$\text{ثابت} \leftarrow \underset{\text{چگالی}}{\sigma} = \frac{Q}{\pi R^2}$$

$$\vec{r} = h\vec{k}$$

$$r - r' = -\rho\cos\varphi\, \vec{i} - \rho\sin\varphi\, \vec{j} + h\vec{k}$$

$$dq = \sigma ds = \sigma\rho\, d\rho\, d\varphi$$

$$|r - r'| = \sqrt{\rho^2 + h^2}$$

$$\vec{r}' = \rho\cos\varphi\, \vec{i} + \rho\sin\varphi\, \vec{j}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq\,(r - r')}{|r - r'|^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^R \frac{\sigma\rho\, d\rho\, d\varphi\,(-\rho\cos\varphi\, \vec{i} - \rho\sin\varphi\, \vec{j} + h\vec{k})}{(\rho^2 + h^2)^{3/2}}$$

$$\frac{-\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\vec{i}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos\varphi\, d\varphi}_{\text{صفر}}\int_0^R \frac{\rho^2 d\rho}{(\rho^2 + h^2)^{3/2}} - \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin\varphi\, d\varphi}_{\text{صفر}}\cdot\int_0^R \frac{\rho^2 d\rho}{(\rho^2 + h^2)^{3/2}}$$

$$+\frac{\sigma h}{4\pi\varepsilon_0}\vec{k}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^R \frac{\rho\, d\rho}{(\rho^2 + h^2)^{3/2}}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma h}{2\varepsilon_0}\vec{k}\int_0^R \frac{\rho\, d\rho}{(\rho^2 + h^2)^{3/2}} = \int \frac{u\, du}{u^3} = \int \frac{du}{u^2} = \frac{-1}{u} = \frac{-1}{\sqrt{\rho^2 + h^2}}$$

$$\rho^2 + h^2 = u^2 \Rightarrow \rho\, d\rho = u\, du$$

$$\vec{E}=\frac{\sigma h}{2\varepsilon_0}\vec{k}\left(\frac{-1}{\sqrt{\rho^2+h^2}}\right)\Bigg|_0^R=\frac{\sigma h}{2\varepsilon_0}\vec{k}\left(\frac{1}{h}-\frac{1}{\sqrt{R^2+h^2}}\right)\Rightarrow$$

$$\vec{E}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}\right)\vec{k}$$

۲ حالت خاص

۱_ شعاع جسم به بی‌نهایت میل کند.

$$E=E_z=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}\right)$$

صفحه‌ی باردار نامتناهی است. $(R\to\infty)$

$$E=E_z=\lim_{R\to\infty}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}\right)=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

۲_ فاصله (h) از جسم باردار خیلی زیاد است $(h \gg R)$ (تقریب زدن)

$(h>10R)$

$$\cancel{\lim\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{h}{\ }\right)}$$

$(h\neq 0)$ (با بسط تیلور عمل کنید)

$$E=E_z=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{h}{h\sqrt{1+R^2/h^2}}\right)=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\left(1+R^2/h^2\right)^{-1/2}\right]\longrightarrow$$

طبق

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\dots$$

$\Rightarrow |x|<1$ همگرا است

$$\longrightarrow\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\left(1-\frac{R^2}{2h^2}+\frac{-\frac{1}{2}\cdot-\frac{3}{2}}{2!}\left(\frac{R^2}{h^2}\right)^2+\dots\right)\right]$$

$$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\times\frac{R^2}{2h^2}=\frac{\sigma R^2}{4\varepsilon_0 h^2}=\frac{\frac{Q}{\pi R^2}R^2}{4\varepsilon_0 h^2}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 h^2}$$

یک جسم باردار در نقاط دور مانند یک بار نقطه‌ای عمل می‌کند.

بارهای الکتریکی با ابعاد محدود در نقاط دور مانند یک بار نقطه‌ای عمل می‌کنند .

تمرین :

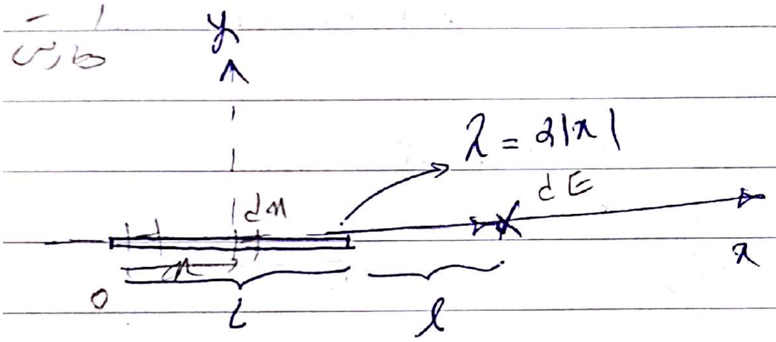
بار الکتریکی خطی روی میله نارسانایی به طول L توزیع شده. چگالی بار الکتریکی خطی ~~$\lambda = ...$~~ $\alpha|x|$

$\lambda = \alpha|x|$

ثابت

میدان الکتریکی در نقطه‌ی مشخص شده بدست آورید .

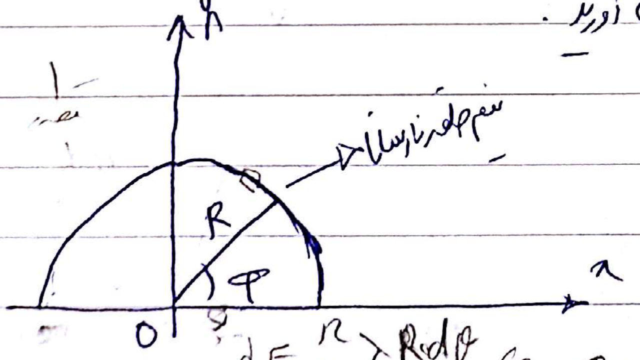
حل



بار الکتریکی با چگالی خطی $\lambda = \alpha \sin^2\varphi$ بر روی یک نیم حلقه نارسانا توزیع شده است .

میدان الکتریکی را در مرکز این نیم حلقه یعنی O بدست آورید .

حل



$$E = \int_0^{\pi} dE$$

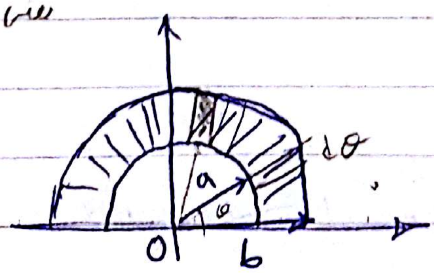
$$dE = \frac{k \lambda R d\theta}{r^2}(\sin\theta + \cos\theta)$$

بار الکتریکی با چگالی سطحی غیر یکنواخت $\sigma = \sigma_0 \sin^2\varphi$ در این ناحیه (هاشور دار) توزیع شده است

مقدار ثابت

میدان الکتریکی را در مرکز بدست آورید

حل



$$\int_a^b dr$$