Subject
Date ۹۸/۱۱/۸

$A \simeq a$

انواع خطا:
۱- خطای مطلق $E_A = e(a)$
۲- خطای نسبی $\delta(a) = \frac{E_A}{|A|}$
۳- خطای مطلق حدی یا کران خطا $E(a) \leqslant e_a = \varepsilon$

• نمایش علمی اعداد و نمایش علمی نرمال شده :

فرض کنیم $A \neq 0$ عددی اعشاری باشد در این صورت همواره A را می‌توان به صورت زیر نمایش داد. (در مبنای ۱۰)

$A = p \times 10^{q}$ نمایش علمی — توان ده — مانتیس $\quad 1 \leqslant p < \underbrace{10}$, $q \in \mathbb{Z}$ — مبنای ده

$A = p \times 10^{q}$ نمایش علمی نرمال شده $\quad \frac{1}{\underbrace{10}} \leqslant p < 1$, $q \in \mathbb{Z}$

$A = \pm 2.001125 = \pm 2.001125 \times 10^{0}$ ۷ رقم با معنا

$A = \pm .0001125 = \pm 1.125 \times 10^{-4} = 0.1125 \times 10^{-3}$ سه رقم با معنا

$A = 217.0012 = 2.170012 \times 10^{2} = 0.\underbrace{2170012}_{p} \times 10^{3}$

(3S) ۳ رقم با معنا $A_1 = 2.114$

(4S) ۴ رقم با معنا $A_2 = 2.140$

(5S) ۵ رقم با معنا $A_3 = 2.11400$

ارقام با معنای عدد A :

ارقام با معنای عدد A برابر است با ارقام با معنای مانتیس آن و عبارت است از ارقام مخالف صفر مانتیس و صفرهای بین ارقام مانتیس و صفرهای جلوی مانتیس

n رقم با معنا $\quad nS \quad : \quad n$ Significant

n رقم اعشار $\quad nD \quad : \quad n$ Decimal

$x^{y} = e^{y \ln x}$

• ذخیره کردن اعداد در کامپیوتر:

اعداد در کامپیوتر برحسب ذخیره مانتیس و توان در مبنای ۲ قابل نمایش هستند.

نمایش عدد در مبنای ۲:

اگر $0 \le p < 1$ و حروف نمایش p در مبنای ۲ باشند، $\beta_i = 0$ یا 1 در

$$(p)_{10} = (0/\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots)_2$$

$$p = \beta_1\times2^{-1} + \beta_2\times2^{-2} + \beta_3\times2^{-3} + \ldots$$

$$p = 0/5 = 1\times2^{-1} + 0\times2^{-2} + \ldots = (0/1000\ldots)_2 = (0/1)_2$$

$$p = 0/65 = 0/5 + 0/15 = 1\times2^{-1} + 0\times2^{-2} + 1\times2^{-3} + 0/025 = (0/101\beta_4\beta_5\ldots)_2$$

$$0/125 + 0/025 = 0/15$$

باشرط اینکه همه β_i ها همزمان یک نباشند.

$$p = \beta_1\times2^{-1} + \beta_2\times2^{-2} + \ldots$$

$$2p = \beta_1 + \underbrace{\beta_2\times2^{-1} + \ldots}_{x<1} \quad (I) \qquad x < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

$$2p = \beta_1 + x \Rightarrow [2p] = [\beta_1 + x] = \beta_1 + [x] \qquad \beta_1 = [2p] \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

از رابطه (I):

$$2p - \beta_1 = \beta_2\times2^{-1} + \beta_3\times2^{-2} + \ldots$$

$$2(2p-\beta_1) = \beta_2 + \underbrace{\beta_3\times2^{-1} + \beta_4\times2^{-2} + \ldots}_{0 \le y < 1} \qquad \beta_2 = [2(2p-\beta_1)]$$

به طور مشابه بقیه ضرایب قابل محاسبه هستند:

i	p	$2p$	$\beta_i = [2p]$	$2p-\beta_i$
1	$0/65$	$1/30$	1	$0/30$
2	$0/30$	$0/60$	0	$0/60$
3	$0/60$	$1/20$	1	$0/20$
4	$0/20$	$0/40$	0	$0/40$

Subject
Date ۹۷/۱۲/۸

مثبت → ۰
منفی → ۱

	۸ بیت	۲۳ بیت	بیت علامت	
دقت معمولی	غایش q	غایش مانتیس P	۰ ۱	(۳۲ بیتی)
	۱۱ بیت	۵۲ بیت	بیت علامت	
دقت مضاعف				(۶۴ بیتی)

$AX=b$ دقت معمولی $\frac{A}{b} \to \boxed{} \to x_1$ (اگر نزدیک به هم بودند جواب درست است)

دقت مضاعف $\boxed{} \to x_2$

• خطای نمایش اعداد:
۱- خطای قطع کردن: انتخاب تقریبی n رقم اعشار از یک عدد بدون توجه به اعداد بعدی (رقم (n+1) ام و...)
۲- خطای روند: انتخاب تقریبی n رقم اعشار از یک عدد با توجه به رقم (n+1) ام ...

فرض می‌کنیم:

$$A = c_1 \cdots c_m / \underbrace{b_1 b_2 \cdots b_n}_{n\ \text{رقم اعشار}} b_{n+1} b_{n+2} \cdots$$

الف) اگر a قطع شده A تا n رقم اعشار باشد در اینصورت:

$$a = c_1 \cdots c_m / b_1 \cdots b_n$$

خطای قطع کردن $|A-a| = |\underbrace{0/00\cdots0}_{n\ \text{مکان}}\, b_{n+1} b_{n+2} \cdots| < 10^{-n}$ حداکثر خطای قطع کردن

$$|A-a| < 10^{-n}$$

مثال: $\pi = 3/1415\ldots$ $\quad a_1 = 3/1 \quad |A-a_1| \leq 10^{-1}$

$a_n = n$ قطع شده A $\quad a_2 = 3/14 \quad |A-a_2| \leq 10^{-2}$

$a_3 = 3/141$

ب) قاعده روند: اگر a روند شده A تا n رقم اعشار باشد در اینصورت برای محاسبه a از قاعده زیر استفاده می‌شود:

۱) اگر $b_{n+1} < 5$ در این صورت ارقام بعد از آن (b_n) را حذف می‌کنیم:

$$a = c_1 \cdots c_m / b_1 \cdots b_n$$

خطای روند

$$|A-a| = |0/0\underbrace{0\ldots 0}_{n\ \text{مکان}}b_{n+1}\, b_{n+2}\ldots| = |0/b_{n+1}\, b_{n+2}\ldots \times 10^{-n}| < 0/5\times 10^{-n}$$

$$= \frac{1}{2}\times 10^{-n}.$$

۲) اگر $b_{n+1} > 5$ در اینصورت یک واحد به b_n اضافه و ارقام بعد از آن را حذف می‌کنیم؛

$$a = c_1\ldots c_m / b_1 \ldots (b_n+1) = c_1\ldots c_m / b_1\ldots b_n + 10^{-n}$$

$$|A-a| = |0/00\ldots b_{n+1}\, b_{n+2}\ldots - 10^{-n}| = |0/b_{n+1}\, b_{n+2}\ldots \times 10^{-n} - 10^{-n}| = |0/b_{n+1}\ldots - 1|\times 10^{-n}$$

$$< \frac{1}{2}\times 10^{-n}$$

۳) اگر $b_{n+1} = 5$ وحداقل یکی از ارقام بعد از آن مخالف صفر باشد، مشابه حالت ۲) عمل می‌کنیم

۴) اگر $b_{n+1} = 5$ و ارقام بعد از آن همگی صفر باشد اگر b_n فرد بود مشابه حالت ۲) واگر b_n زوج بود مشابه حالت ۱) عمل می‌کنیم:

$A = 217{,}295075$

$a_n =$ روند شده A تا n رقم اعشار

$a_1 = 217{,}3$ 1D

$a_2 = 217{,}30$ 2D

$a_3 = 217{,}295$ 3D

$a_4 = 217{,}2951$ 4D

$a_5 = 217{,}29508$ 5D

Subject
Date ۹۷/۱۲/۱۵

قاعده روند اعداد تا n رقم اعشار

$A \cong a \quad (nD)$

$|A-a| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-n} = 5 \times 10^{-(n+1)}$ خطای روند n رقم اعشار

$\pi = ۳٫۱۴۱۵ \ldots = ۰٫۳۱۴۱۵ \ldots \times 10^{1}$ نمادگذاری علمی

$a_1 = ۳٫۱ \quad (1D)$

$a_2 = ۳٫۱۴ \quad (2D)$

$a_3 = ۳٫۱۴۲ \quad (3D)$

مثال) تقریبی از عدد π بیابید که خطای آن از 5×10^{-3} کمتر باشد.

اگر a روند شده π تا n رقم اعشار باشد آنگاه $|\pi - a| \leqslant 5 \times 10^{-(n+1)}$

در این مثال $n=2$ پس a روند شده π تا ۲ رقم اعشار است، $a = ۳٫۱۴$

مثال) کدام تقریب از عدد π دارای خطای کمتر از $\varepsilon = 10^{-4}$ است.؟

$|\pi - a| \leqslant 5 \times 10^{-(n+1)} \leqslant 10^{-4} = \varepsilon$

عدد $n \in \mathbb{N}$ را طوری می‌یابیم که $5 \times 10^{-(n+1)} \leqslant 10^{-4} = \varepsilon$

$\log(5 \times 10^{-(n+1)}) \leqslant \log \varepsilon$

$n = ۴, ۵, ۶, \ldots$

روند شدهٔ π تا ۴ رقم اعشار برابر است با $a = ۳٫۱۴۱۶$

تمرین) اگر a روند شده A تا n رقم اعشار باشد ثابت کنید:

$\frac{|A-a|}{|A|} \leftarrow$ خطای نسبی

$\frac{|A-a|}{|A|} \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{1-n}$ خطای نسبی روند n رقم اعشار

$A = p \times 10^{q} \quad ۰٫۱ \leqslant p < 1$ و $q \in \mathbb{Z}$ (نمایش علمی) ~~ــــ~~

$a = p' \times 10^{q}$ روند شدهٔ p تا n رقم اعشار و می‌دانیم p'

$|p-p'| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-n}$

$\frac{1}{|A|} = \frac{1}{|p \times 10^{q}|} \leqslant \frac{1}{۰٫۱} \times \frac{1}{10^{q}}$

$\frac{|A-a|}{|A|} = \frac{|(p-p') \times \cancel{10^{q}}|}{|p \times \cancel{10^{q}}|} \leqslant \frac{\frac{1}{2} \times 10^{-n}}{۰٫۱} = \boxed{\frac{1}{2} \times 10^{1-n}}$ ■

PAPCO

مثال) کدام تقریب از عدد π دارای خطای نسبی کمتر از 10^{-3} است؟

راه اول : $\pi = 3.1415...$

$a_1 = 3.1 \quad (1D) \qquad \frac{|\pi - a_1|}{|\pi|} \leq 10^{-3}$

$a_2 = 3.14 \quad (2D) \qquad \frac{|\pi - a_2|}{|\pi|} \leq 10^{-3}$

$\vdots \qquad \vdots$

راه دوم : $\frac{|\pi - a|}{|\pi|} \leq \frac{1}{2} \times 10^{1-n} \leq 10^{-3}$ اگر a گرد شدهٔ π تا n رقم اعتبار باشد ⇐

n را طوری می‌یابیم که : $\frac{1}{2} \times 10^{1-n} \leq 10^{-3}$ ، $n \in \mathbb{N}$

$n = 4, 5, ...$ (گرد شده تا ۴ رقم اعتبار)

• خطای اعمال محاسباتی یا چهار عمل اصلی :

اگر a و b تقریبی از A و B و همگی مثبت :

کران خطا

$A \cong a \qquad E_A = |A - a| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-n} = e_a$

$B \cong b \qquad E_B = |B - b| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-n} = e_b$

$\delta(a) \cong \frac{e_a}{|a|} \quad , \quad \delta(b) \cong \frac{e_b}{|b|}$

۱) عمل جمع :

$A + B \cong a + b$

$$\begin{cases} E_{A+B} \leq E_A + E_B \\ \delta(a+b) \leq \operatorname{Max}\{\delta(a), \delta(b)\} \end{cases}$$

$E_{A \pm B} = |(A \pm B) - (a \pm b)| \leq |A - a| + |B - b| = E_A + E_B \leq 10^{-n} \; (\nearrow e_{(a+b)})$ کران خطای جمع

مثال) مطلوب است محاسبه $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ و محاسبه حداکثر خطای مطلق و نسبی (محاسبات 3D)

$A = \sqrt{5} \cong a = 2.236 \qquad E_a \leq \frac{1}{2} \times 10^{-3} = e_a$ خطای روند (3D)

$B = \sqrt{3} \cong b = 1.732 \qquad E_b \leq \frac{1}{2} \times 10^{-3} = e_b$ کران خطای جمع

$A + B \cong a + b = 3.968 \qquad E_{A+B} \leq E_A + E_B \leq \frac{1}{2} \times 10^{-3} + \frac{1}{2} \times 10^{-3} = 10^{-3} = e_{(a+b)}$

خطای مطلق جمع