DATE ۹۶/۶/۲۷ SUBJECT:

آخر جلسه‌ی قبل گفتیم:

$$Max \ Z = x + 5y$$

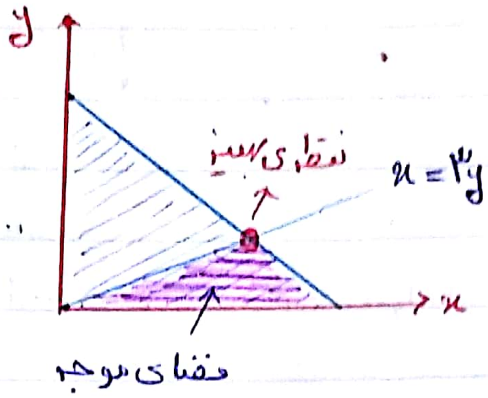
s.t. ① $3y \leq x$

② $x+y \leq 8$

محدودیت علامت ③ $x, y \geq 0$

$x \rightarrow$ میزان ساعت مطالعه

$y \rightarrow$ میزان ساعت استراحت



$x^* = 6$

$y^* = 2$

$z^* = 16$

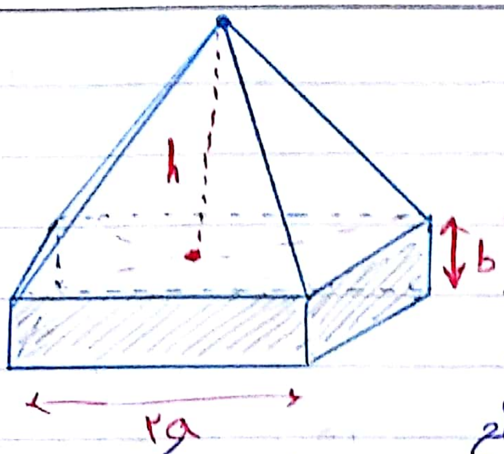
به جواب‌هایی که در تمام محدودیت‌های مسئله (محدودیت‌های اصلی + علامت) صدق می‌کنند جواب‌های موجه (feasible solutions) گویند.

جواب‌های موجه در فضای حل مسئله تشکیل فضای موجه (feasible space) را می‌دهند.

هدف از حل یک مسئله بهینه سازی در مدل برنامه ریزی ریاضی یافتن جواب (یا جواب‌هایی) است که از این جواب‌های موجه بهترین مقدار را برای تابع هدف تولید کنند که به آن جواب (یا جواب‌های) بهینه (optimal solution) گویند.

مسئله: به دنبال برپا کردن چادری به شکل هرم هستیم که سطح قاعده‌ی آن مربع

DATE / / SUBJECT:



است. هر ضلع مربع را ۲a و هر ستون دارای ارتفاع b است. ارتفاع نوک هرم تا قاعده ی مربع h می باشد. اگر حجم مورد نظر برای چادر را ۵۰ m^3 و فاصله ی نوک هرم از کف زمین را ۳m فرض کنیم باید a و b و h را چقدر در نظر بگیریم تا سطح کل چادر حداقل شود تا با کمترین میزان پارچه بتوان آن را تولید کرد. 8

متغیرهای تصمیم گیری $\begin{cases} a \\ b \\ h \end{cases}$

تابع هدف $\quad Min\ S = \underbrace{8ab}_{4\times 2ab} + 4a\sqrt{a^2+h^2}$

سطح جانبی هرم با قاعده ی مربع $= l\sqrt{l^2+4h^2} = 2a\sqrt{4a^2+4h^2}$

l: ضلع مربع ، h: ارتفاع هرم

$= 4a\sqrt{a^2+h^2}$

محدودیت ها

s.t.

① $\underbrace{4a^2b}_{\text{حجم مکعب مستطیل}} + \underbrace{\frac{1}{3}4a^2h}_{\text{حجم هرم}} = 50$ — حجم هرم = $\frac{1}{3}$ مساحت قاعده ضرب در ارتفاع

② $b+h=3$

③ $a, b, h \geq 0$

$a^* = 2,633$

$b^* = 1,205$

$h^* = 1,795$

$S^* = 58,937$

✓ علائم موجود در محدودیت های مسئله (نامعادلات یا معادلات مربوطه) باید $\geq$ یا $\leq$ یا $=$ باشند.

Sahand

در مورد مواردی مثل $ax+by<d$ باید یا رامتری مثل ε را تعریف کنیم که

تا معادله ما به صورت $ax+by \leq d+\varepsilon$ تعریف شود.
مثلاً وقتی می گوییم $x<10$ ، x اگر اره هم از ۱۰ کوچکتر باشد قبول است؟

اگر محدودیت مانند صفری شد $\min S$ برای حل از محدودیت ۲ باید h را برحسب t بنویسیم
وبعد از محدودیت ۱ استفاده کنیم و هم را برحسب a بنویسیم و در معادله ی s قرار دهیم
و سپس مشتق بگیریم و بیابیم.

چارچوب کلی مدل برنامه ریزی ریاضی

$$\text{Max} \ (\text{یا} \ \text{Min}) \quad z = f(x_1, \dots, x_n)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} g_i(x_1, \dots, x_n) \left\{ \begin{matrix} \leq \\ \geq \\ = \end{matrix} \right\} b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \\ x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

با توجه به انواع توابع مختلفی که می توان در یک مدل برنامه ریزی ریاضی تعریف کرد
جواب های برنامه ریزی ریاضی به انواع مختلف تقسیم می شوند.

اگر تمام توابع موجود در این مدل خطی باشند مدل برنامه ریزی خطی (LP Linear programming)
می باشد و اگر حداقل یکی از توابع موجود غیرخطی باشد مدل برنامه ریزی غیرخطی است
(Nonlinear programming) NLP

DATE / / SUBJECT:

اگر متغیری از مسئله برنامه ریزی ریاضی بتواند کلیه ی مقادیر + یا - یا ۰ را اختیار کند، متغیر آزاد در علامت و با urs آن را نمایش می دهیم.
(unrestricted in sign)

در مدل سازی می تواند منفی باشد اما برای حل باید علامت در نظر گرفت. X urs
متغیر آزاد در علامت مثل دما و یا تعیین مکان

همچنین ممکن است متغیرهای تصمیم گیری تنها مجاز باشند که مقادیر عدد صحیح غیر منفی را اختیار کنند.

$x \geqslant 0$, Int ~ Integer

بهینه سازی در فضای پیوسته راحت تر است.

چارچوب کلی مدل برنامه ریزی خطی

$$\text{Max} \ (\text{یا} \ \text{Min}) \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

$$\text{s.t.} \quad (1) \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \left\{ \begin{matrix} \geqslant \\ \leqslant \\ = \end{matrix} \right. b_1$$

$$(2) \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \left\{ \begin{matrix} \geqslant \\ \leqslant \\ = \end{matrix} \right. b_2$$

$$\vdots$$

$$(m) \quad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \left\{ \begin{matrix} \geqslant \\ \leqslant \\ = \end{matrix} \right. b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geqslant 0$$

Sahand

DATE / / SUBJECT:

فرم ماتریسی مدل LP :

$$\begin{cases} Max\ z = Cx \\ Ax \begin{Bmatrix} \leq \\ \geq \\ = \end{Bmatrix} b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

بردار ضرایب تابع هدف $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$

ماتریس ضرایب متغیرها در محدودیت ها $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$

بردار مقادیر سمت راست $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{m\times 1}$ بردار متغیرها $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

" A و b و C در مسائل باید به ما داده شود "

مدل برنامه ریزی تولید (production planning)

سه محصول در یک کارگاه با توجه به عملیات تولیدی ، تراشکاری ، ورقکاری ، جوشکاری تولید می شوند . اطلاعات موردنیاز در جدول آمده است . می خواهیم مقدار تولید هر محصول جهت حداکثرسازی سود تعیین کنیم .

عملیات	محصول ۱	محصول ۲	محصول ۳	حداکثر زمان عملیات برحسب دقیقه
تراشکاری	۱	۲	۱	۴۳۰
جوشکاری	۳	۰	۲	۴۶۰
ورقکاری	۱	۴	۰	۴۲۰
سود هر واحد محصول برحسب واحد ۹۰	۳۰۰۰	۲۰۰۰	۵۰۰۰	

Lingo, CPLEX, GAMS, ...

حرفه‌ای

DATE / / SUBJECT:

متغیرهای تصمیم‌گیری x_j = تعداد محصول نوع j که در طول روز تولید می‌شود j=۱و۲و۳

تابع هدف $Max\ Z = 3000x_1 + 2000x_2 + 5000x_3$

s.t.

محدودیت‌ها

① $x_1 + 2x_2 + x_3 \le 430$ — تراشکاری — محدودیت زمانی

② $3x_1 + 2x_3 \le 460$ — جوشکاری

③ $x_1 + 4x_2 \le 420$ — رنگکاری

④ $x_1, x_2, x_3 \ge 0$ علامت

$x_1^* = 0$ $x_2^* = 100$ $x_3^* = 230$ $Z^* = 1{,}350{,}000$

جواب‌های بهینه مسئله

۸ چه مقدار جوشکاری نیاز است که فقط کافیست در جواب‌ها را در سمت چپ فامعادله جایگذاری کنیم ۸ علاوه بر سود

اگر بخواهیم حداقل ۲۰ واحد از محصول شماره یک داشته باشیم؟

⑤ $x_1 \ge 20$ البته باید این هشدار را بدهیم که ممکن است

سود کمتر شود چون در حالت بهینه x_1 شده بود صفر اما اکنون باید ۲۰ واحد x_1 تولید شود پس سود کاهش می‌یابد.

$x_1^* = 20$ و $x_2^* = 100$ و $x_3^* = 200$ و $Z^* = 1{,}260{,}000$

اگر بخواهیم حداقل ۳۰۰ واحد از محصولات در طول روز تولید شوند:

محدودیت زائد ⑥ $x_1 + x_2 + x_3 \ge 300$

با اضافه شدن این محدودیت نیازی به حل مجدد مدل نبود. فقط باید اعدادهای را چک می کردیم. که در این مسئله رعایت شده است.

محدودیت ۵ در کدام عملیات ما تاثیر گذار بود؟ کاهش درمقدار سمت چپ جایگذاری کنیم.
محصول ۱ کاهش ۲۰ از تولید محصول ۳ کم شد

مدل سازی هر مسئله واقعی نیازمند فرضیات ساده سازی است.

گفتیم مثلاً محصول ۱ سه مرحله دارد اما نگفتیم ترتیب عملیات ها رو و از آن صرف نظر کردیم.

مسئله رژیم غذایی (Diet problem)

① اولین مسئله برنامه ریزی خطی که در یک محیط واقعی مدل سازی شد (دهه ی ۵۰ میلادی)

	هزینه (واحد)	چربی gr	قند gr	کلسیم gr	کالری gr
هر تکه کیک	۵۰۰	۲	۲	۳	۴۰۰
هر واحد بستنی	۲۰۰	۴	۲	۲	۲۰۰
هر بطری نوشابه	۳۰۰	۱	۴	–	۱۵۰
هر بسته آجیل/تنقلات	۸۰۰	۵	۴	–	۵۰۰

هدف: حداقل هزینه

برنامه ی تغذیه ی روزانه:
حداقل ۵۰۰ کالری
〃 ۶ گرم کلسیم
〃 ۱۰ 〃 قند
〃 ۸ 〃 چربی

DATE / / SUBJECT:

متغیرهای تصمیم گیری

مقدار خوراکی ستاره از جنس j ام $= x_j$

$$\begin{cases} j=1 \\ j=2 \\ j=3 \\ j=4 \end{cases}$$

تابع هدف

$$\text{Min} \quad Z = 500x_1 + 200x_2 + 300x_3 + 800x_4$$

محدودیت ها

s.t.

میزان کالری موجود در برنامه تغذیه

(1) $400x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 500x_4 \geq 500$

(2) $3x_1 + 2x_2 \geq 6$

(3) $2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 \geq 10$

(4) $2x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 \geq 8$

محدودیت علامت

(5) $x_j \geq 0$, Int

Lingo $x_1^* = 0$ $x_2^* = 3$ $x_3^* = 1$ $x_4^* = 0$ $Z^* = 900$

اگر بخواهیم بدانیم چه میزان از هرکدوم داریم باید در محدودیت جایگزین کنیم.

پس از جایگذاری محدودیت شماره ی ۲ و ۳ به صورت تساوی ظاهر شدند اما چربی و کالری بیشتر از حداقل شده است.

مدل ما دو مشکل دارد از نظر سلامت، هدف نباید هزینه باشد، در محدودیت ها بجای حداقل میشه حداکثر باشد.