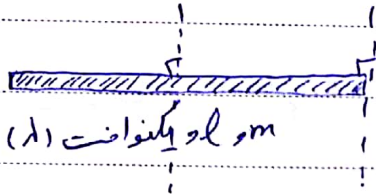


$$I = \int r^2 dm$$

الجر جسم را پیوسته بگیریم داریم :

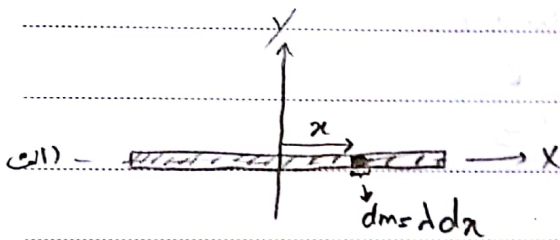
$$dm \begin{cases} \rho dv \\ \sigma da \\ \lambda dl \end{cases}$$

برای حرکت دورانی:  $K = \frac{1}{2} M V^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2} I \omega^2$  **یادآوری:**

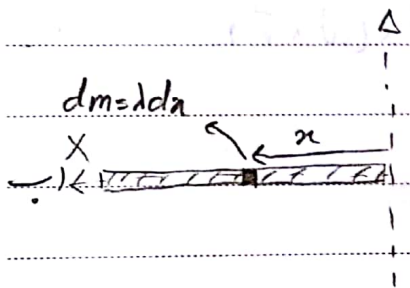


**مثال:** همان اینرسی را برای دو محور دورانی یکی از مرکز جرم میلهی لژد

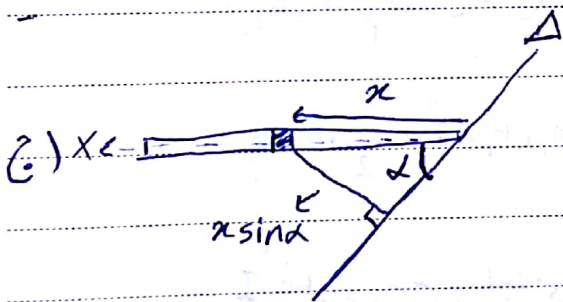
و دیگری بر محور عمود است را محاسبه کنید.



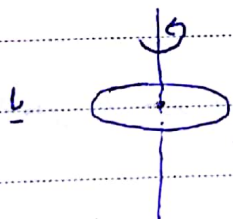
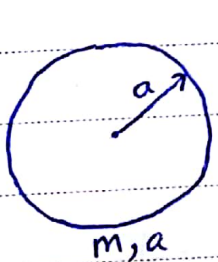
$$\lambda = \frac{m}{l} \Rightarrow I_{cm} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 \lambda dx = \lambda \frac{x^3}{3} \Big|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{1}{12} m l^2$$



$$\Rightarrow I_{\Delta} = \int_0^l x^2 \lambda dx = \lambda \frac{x^3}{3} \Big|_0^l = m \frac{l^2}{3}$$



$$I_{\Delta} = \int_0^l x^2 \sin^2 \alpha \lambda dx = \lambda \sin^2 \alpha \frac{x^3}{3} \Big|_0^l = \frac{1}{3} m l^2 \sin^2 \alpha$$

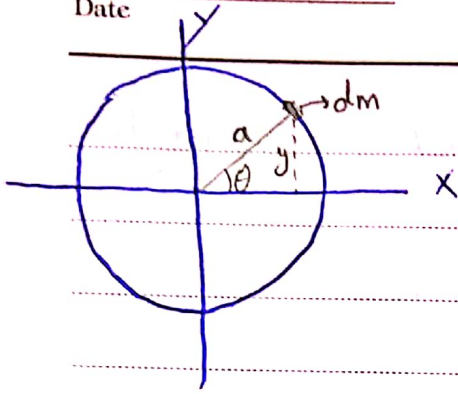


$$I = m a^2$$

**مثال:** همان اینرسی را محاسبه می‌کنیم که محور از مرکز آن می‌گذرد.

چون فاصله همه نقاط تا مرکز برابر است پس  $r^2$  ثابت است و  $\int dm$  هم برابر جرم کل است

$$\Rightarrow \int r^2 dm = r^2 \cdot M$$



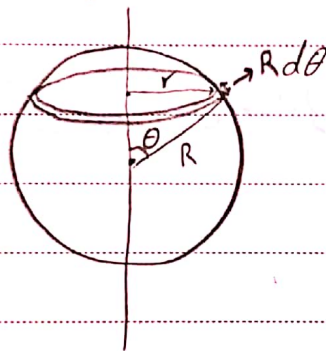
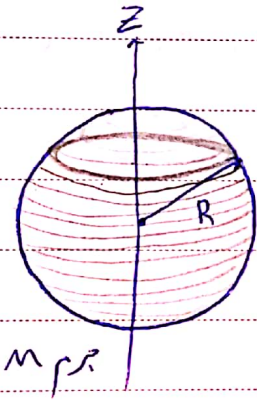
$$I_x = \int y^2 dm \quad y = a \sin \theta \quad dm = \lambda (a d\theta) \quad \text{مثال:}$$

$$\lambda = \frac{m}{2\pi a} \Rightarrow I_x = \int_0^{2\pi} (a \sin \theta)^2 \frac{m}{2\pi} d\theta = \frac{ma^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta$$

$$= \frac{ma^2}{4\pi} \left[ \theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{2\pi} = \frac{ma^2}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{\text{قطر}} = \frac{ma^2}{2}}$$

مثال: یک پوسته کروی داریم همان اینرسی حول یکی از قطبهای آن را محاسبه کنید.



$$r = R \sin \theta \quad dI = r^2 dm$$

$$= (R \sin \theta)^2 (\sigma 2\pi r \cdot R d\theta)$$

$$\sigma = \frac{M}{4\pi R^2}$$

$$\boxed{dI = 2\pi R^3 \sigma \sin^3 \theta d\theta}$$

$$I = \int_0^\pi 2\pi R^3 \sigma \sin^3 \theta d\theta = 2\pi R^3 \sigma \left[ -\cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^\pi = \frac{8}{3} \pi R^3 \sigma = \boxed{\frac{2}{3} MR^2}$$

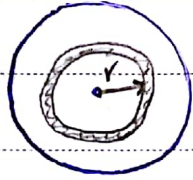
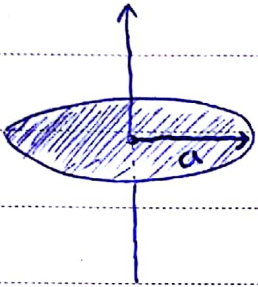
تمرین: همان اینرسی یک کره توپر حول یکی از قطبهایش را محاسبه کنید.

$$\left( I = \frac{2}{5} MR^2 \text{ (جواب:)} \right)$$

(باید کره را مجموعه ای از پوسته کادرنظر بگیریم)



مثال: همان اینرسی یک قرص حول محوری که عمود از مرکز آن می‌گذرد را محاسبه کنید.

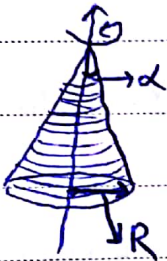


$$dI = r^2 dm \quad dm = \sigma \frac{2\pi r dr}{\text{عرض طول}}$$

$$\Rightarrow dI = r^3 2\pi\sigma dr \quad \sigma = \frac{M}{\pi a^2}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^a 2\pi\sigma r^3 dr = 2\pi\sigma \frac{r^4}{4} \Big|_0^a = 2\pi\sigma \frac{a^4}{4} = \boxed{\frac{1}{2} Ma^2}$$

تمرین: همان اینرسی قرص بالا را حول یکی از قطرهایش محاسبه کنید.



تمرین: " مخروطی توپیر را حول محور اصلی اش محاسبه کنید. "