(۳)

"توابع توزیع احتمال گسسته خاص"

۱- توزیع برنولی: $B(1,p)$ ← تنها دو نتیجه شکست (q) و پیروزی (p) برای آزمایش وجود دارد: (یکبار انجام آزمایش)

$$f(x)=\begin{cases} p & x=1 \\ q & x=0 \\ 0 & o.w \end{cases} \quad \text{یا} \quad f(x)=\begin{cases} p^x q^{1-x} & x=0,1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$E(x)=E(x^2)=p$

$\sigma^2=p.q$

$m_x(t)=pe^t+q$

۲- توزیع دوجمله‌ای: اگر آزمایش برنولی را n بار پشت سرهم انجام بدهیم و x تعداد پیروزی‌ها در این n بار باشد، داریم:

$$f(x)=\begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} & x=0,1,\dots,n \\ 0 & o.w \end{cases}$$

• اگر X دارای توزیع دوجمله‌ای باشد نشان می‌دهیم
به این شکل

$X \sim B(n,p)$

مد توزیع دوجمله‌ای ← رسم شکل

$E(x)=np \qquad \sigma_x^2=npq \qquad m_x(t)=(pe^t+q)^n$

$\boxed{p(n+1)-1 \leqslant x_m \leqslant (n+1)p}$

اگر طرفین Z ← هر دو مد

اگر طرفین غیر Z ← فقط عدد صحیح بینشون هست.

۳- توزیع هندسی: اگر آزمایش برنولی را آن قدر تکرار کنیم تا به اولین پیروزی برسیم و بعد از آن آزمایش خاتمه یابد، و p هم در این تکرارها ثابت بماند. یک آزمایش هندسی انجام داده‌ایم که Y برابر با تعداد شکست‌ها قبل از رسیدن به اولین پیروزی است (نوع دوم)

$$f(y)=\begin{cases} pq^y & y=0,1,\dots \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$E(y)=\dfrac{q}{p} \qquad m_y(t)=\dfrac{p}{1-qe^t}$

$\sigma_y^2=\dfrac{q}{p^2}$

نکته: اگر تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی X وجود داشته باشد ← ① همه گشتاورها رو تولید می‌کند.

② ثابت می‌کند که توزیع X منحصر به فرد است و یکتاست.

٤- توزیع هندسی نوع اول: آنگاه متغیر X تعداد آزمایش‌ها برای رسیدن به اولین پیروزی در یک آزمایش هندسی باشد

آنگاه X متغیر تصادفی هندسی نوع اول است.

$$f(x)=\begin{cases} pq^{x-1} & x=1,2,\dots \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$X=Y+1 \Rightarrow E(x)=E(y+1)=E(y)+1=\dfrac{1}{p}$

$\sigma_x^2=\sigma^2(y+1)=\dfrac{q}{p^2}$

$m_x(t)=E(e^{tx})=E(e^{ty}\cdot e^t)=e^tE(e^{ty})=\dfrac{pe^t}{1-qe^t}$

تابع مولد کومولان‌ها

$\varphi_x(t)=\ln M_x(t)=\ln\dfrac{pe^t}{1-qe^t}=\ln pe^t-\ln(1-qe^t) \Rightarrow 1-qe^t>0 \to t+\ln q<0 \Rightarrow t<-\ln q \Rightarrow t\in(-\infty,$ منفی)

$\varphi_x(0)=0, \quad \varphi_x'(0)=E(x), \quad \varphi_x''(0)=\sigma_x^2$