توابع متقابل

هیپربولیک و وارون هیپربولیک

تابع زوج $f(x) = f(-x)$ تابع فرد $f(-x) = -f(x)$

تابع فرد $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ تابع زوج $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

هذلولی افقی $x^2 - y^2 = 1 \Longrightarrow \cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$

مساحت محصور بین محور x و هذلولی افقی $x^2-y^2=1$ و خط واصل بین مبدأ و نقطه $(\cosh(t), \sinh(t))$ واقع بر هذلولی $\frac{t}{2}$ است

$\sinh(-x) = -\sinh x$ $\cosh(-x) = \cosh(x)$ $\sinh 0 = 0$ $\cosh 0 = 1$

مشتق توابع هیپربولیک

$\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$ $\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$

سایر توابع هیپربولیک

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \xrightarrow{\times e^x} \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$ $\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$

مشتق سایر توابع هیپربولیک

$(\coth x)' = -\operatorname{csch}^2 x = 1 - \coth^2 x$ $(\tanh x)' = \operatorname{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x$

$(\operatorname{csch} x)' = -\operatorname{csch} x \cdot \coth x$ $(\operatorname{sech} x)' = -\operatorname{sech} x \cdot \tanh x$

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ $\cosh x + \sinh x = e^x$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \cdot \sinh y$$

$$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}$$

$\sinh(2x) = 2\sinh x \cdot \cosh x$ $\qquad$ $\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$

فرمول طلایی $\cosh^2(x) = \frac{1}{2}(1+\cosh(2x))$ $\qquad$ $\sinh^2(x) = \frac{1}{2}(\cosh(2x)-1)$

نکته: فرض کنید $i^2=-1$ (اعداد موهومی) آنگاه طبق رابطه اویلر:

$e^{ix} = \cos x + i\sin x$ $\qquad$ $e^{-ix} = \cos(-x) + i\sin(-x) = \cos x - i\sin x$

بنابراین

$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \cosh(ix)$ $\qquad$ $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \frac{1}{i}\sinh(ix)$

$\cos x = \cosh(ix)$ $\qquad$ $i\sin x = \sinh(ix)$

در این صورت:

$\cos(ix) = \cosh(i \times ix) = \cosh(-x) \overset{\text{زوج}}{=\!=} \cosh x$

$\sin(ix) = \frac{1}{i}\sinh(i \times ix) = \frac{1}{i}\sinh(-x) \overset{\text{فرد}}{=\!=} \frac{-1}{i}\sinh x = i\sinh x$

وارون توابع هیپربولیک:

توابع $\sinh x$ و $\tanh$ مطابق نمودارشان اکیداً صعودی و از این رو یک‌به‌یک و وارون‌پذیر هستند.

نمادگذاری: $\sinh^{-1}$ ، $\operatorname{arg}\sinh$ ، $\operatorname{Arg}\sinh$

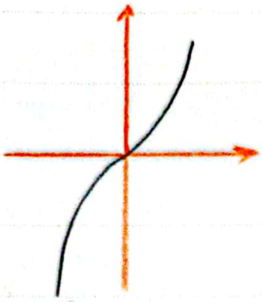
$\sinh^{-1}x = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ $x\in\mathbb{R}$ $\qquad$ $\tanh^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ $|x|<1$

چون $\cosh$ یک‌به‌یک نیست، بنابراین برای تعریف وارون باید دامنه‌اش را محدود کنیم و روی $[0,+\infty)$ در نظر می‌گیریم:

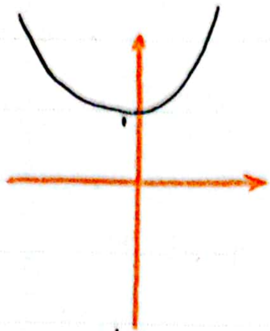
$\cosh^{-1}x = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$ $x\geq 1$ $\qquad$ $\operatorname{sech}^{-1}x = \cosh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ $0<x\leq 1$

$\coth^{-1}(x) = \tanh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ $|x|>1$ $\qquad$ $\operatorname{csch}^{-1}x = \sinh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ $x\neq 0$

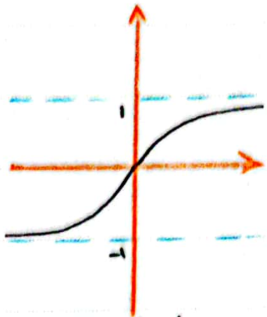
Date: Subject:



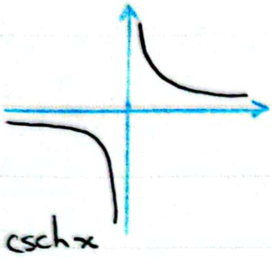
$y = \sinh x$



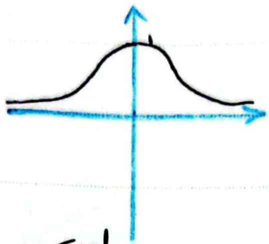
$y = \cosh x$



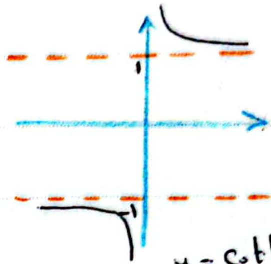
$y = \tanh x$



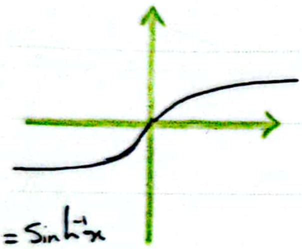
$y = \operatorname{csch} x$



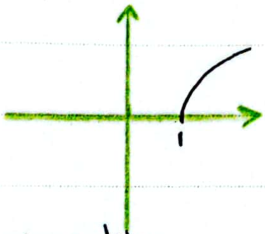
$y = \operatorname{sech} x$



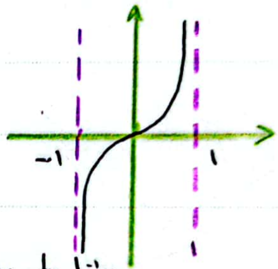
$y = \coth x$



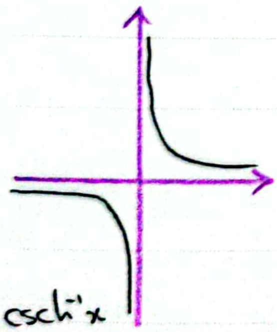
$y = \sinh^{-1} x$



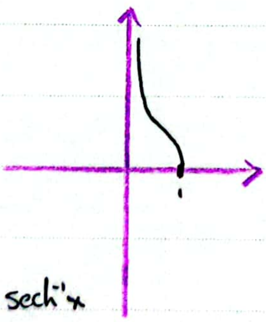
$y = \cosh^{-1} x$



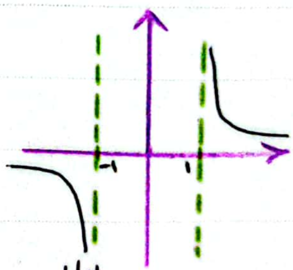
$y = \tanh^{-1} x$



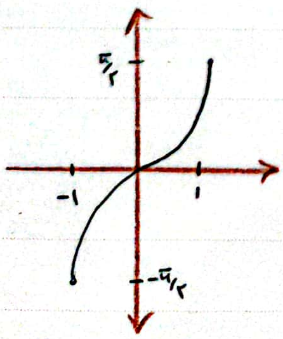
$y = \operatorname{csch}^{-1} x$



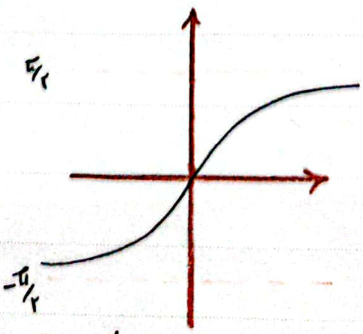
$y = \operatorname{sech}^{-1} x$



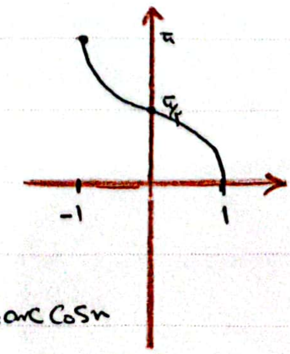
$y = \coth^{-1} x$



$y = \arcsin x$



$y = \arctan x$



$y = \arccos x$