بررسی عملکرد چند نگاشت مقدماتی

۱) نگاشت کسری $w = \frac{1}{z}$

نگاشت مذکور در همه‌جا به غیر از در $z = 0$ تحلیلی بوده و مشتق آن یعنی $-\frac{1}{z^2}$ همواره مخالف صفر است. لذا این نگاشت همه‌جا به غیر از در مبدأ مختصات همدیس می‌باشد. می‌توان این طور تصور کرد که نقاط ∞ و 0 با نگاشت $w = \frac{1}{z}$ به نقاط 0 و ∞ تبدیل می‌شوند.

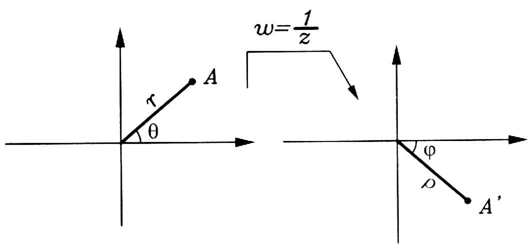
توجه ۱ :

اگر فرض کنیم $w = \rho e^{i\varphi}$ و $z = r e^{i\theta}$ ، تحت این نگاشت داریم:

$$w = \frac{1}{z} \quad \to \quad \rho e^{i\varphi} = \frac{1}{r e^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i\theta} \quad \to \quad \begin{cases} \rho = \frac{1}{r} \\ \varphi = -\theta \end{cases}$$

یعنی نگاشت $w = \frac{1}{z}$ دو عمل متوالی زیر را انجام می‌دهد:

- فاصله هر نقطه تا مبداء مختصات را معکوس می‌کند.
- زاویه شعاع حامل هر نقطه را منفی می‌کند.



توجه ۲ :

اگر فرض کنیم $w = u + iv$ و $z = x + iy$ تحت این نگاشت داریم:

$$w = \frac{1}{z} \;\to\; z = \frac{1}{w} \;\to\; x + iy = \frac{1}{u + iv} \;\to\; x + iy = \frac{1}{u + iv}\,\frac{u - iv}{u - iv} = \frac{u - iv}{u^2 + v^2} \;\to\; \begin{cases} x = \frac{u}{u^2 + v^2} \\ y = \frac{-v}{u^2 + v^2} \end{cases}$$

از اینجا می‌توان نشان داد شکلی با معادله $A\left(x^2 + y^2\right) + Bx + Cy + D = 0$ که مبین خط و یا دایره‌ای در صفحه z می‌باشد به شکلی با معادله $D\left(u^2 + v^2\right) + Bu - Cv + A = 0$ که مبین خط و یا دایره‌ای در صفحه w می‌باشد، تبدیل می‌شود.

مثال : ناحیه $\operatorname{Im}(z) \le 1$ از صفحهٔ z تحت نگاشت وارونی $\left(w = \frac{1}{z}\right)$ در صفحه w به چه ناحیه‌ای تبدیل می‌شود؟

۱) $\left|w - \frac{1}{2}\right| \ge \frac{1}{2}$ ۲) $\left|w - \frac{i}{2}\right| \ge \frac{1}{2}$ ۳) $\left|w + \frac{1}{2}\right| \ge \frac{1}{2}$ ۴) $\left|w + \frac{i}{2}\right| \ge \frac{1}{2}$

حل :

$$w=\frac{1}{z} \;\rightarrow\; z=\frac{1}{w} \;\rightarrow\; z=\frac{1}{u+iv}\frac{u-iv}{u-iv} \;\rightarrow\; z=\frac{u-iv}{u^2+v^2}$$

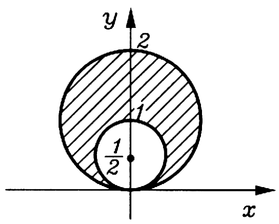
پس ناحیه $\mathrm{Im}(z)\le 1$ تبدیل می‌شود به:

$$\frac{-v}{u^2+v^2}\le 1 \;\rightarrow\; u^2+v^2\ge -V \;\rightarrow\; u^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2\ge\frac{1}{4}$$

که مرز و بیرون دایره‌ای به مرکز $\left(0,\frac{-1}{2}\right)$ و شعاع $\frac{1}{2}$ است و آن را می‌توان به صورت زیر نیز بیان کرد:

$$\left|w+\frac{i}{2}\right|\ge\frac{1}{2}$$

مثال : تبدیل یافته ناحیه نشان داده شده در شکل زیر را با نگاشت $w=\frac{1}{z}$ پیدا کنید.



حل :

$$A\left(x^2+y^2\right)+Bx+Cy+D=0 \xrightarrow{w=\frac{1}{z}} D\left(u^2+v^2\right)+Bu-Cv+A=0$$

تبدیل یافته مرزها را پیدا می‌کنیم.

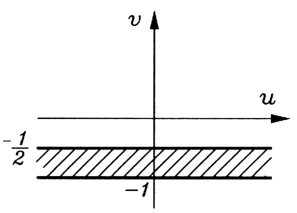
دایره کوچک : $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2 \;\rightarrow\; x^2+y^2-y=0$

با نگاشت $w=\frac{1}{z}$ تبدیل می‌شود به:

$$0\left(u^2+v^2\right)+0u-(-1)v+1=0 \;\rightarrow\; v=-1$$

دایره بزرگ : $x^2+(y-1)^2=(1)^2 \;\rightarrow\; x^2+y^2-2y=0 \;\rightarrow\; 2v+1=0 \;\rightarrow\; v=-\frac{1}{2}$

یک نقطه دلخواه از ناحیه اصلی در نظر می‌گیریم (مثلاً $z=\frac{3}{2}i$)، تبدیل یافته آن چنین می‌شود:



$$w=\frac{1}{\frac{3}{2}i}=-\frac{2}{3}i$$

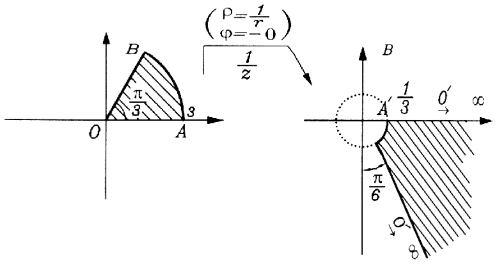
که در ناحیه $-1\le v\le\frac{-1}{2}$ قرار می‌گیرد.

مثال : خطی را که از مبدأ مختصات عبور نمی‌کند در نظر گرفته‌ایم. تحت نگاشت $w=\frac{1}{z}$ ویژگی‌های شکل حاصله چه خواهد بود؟

حل : در صفحه xy خطی داریم که از مبدأ مختصات نمی‌گذرد. یعنی $A=0$ و $D\neq 0$ $\left(Bx+Cy+D=0\right)$
پس در صفحه uv دایره‌ای داریم که از مبدأ مختصات می‌گذرد. یعنی $\left(D\left(u^2+v^2\right)+Bu-Cv=0\right)$

مثال : تبدیل یافته ناحیه نشان داده شده در شکل زیر را تحت نگاشت $w=\frac{1}{z}$ پیدا کنید.

حل :



۲) نگاشت خطی $w=az+b$ (a , b اعداد مختلط دلخواه و $a\neq 0$)

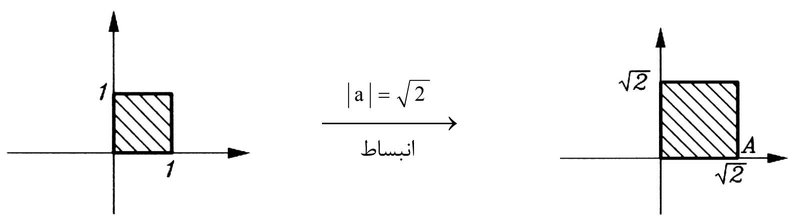
نگاشت مذکور همه‌جا تحلیلی بوده و مشتق آن یعنی a همواره مخالف صفر است، لذا این نگاشت در همه‌جا همدیس می‌باشد.
می‌توان نشان داد این نگاشت سه عمل متوالی زیر را انجام می‌دهد:

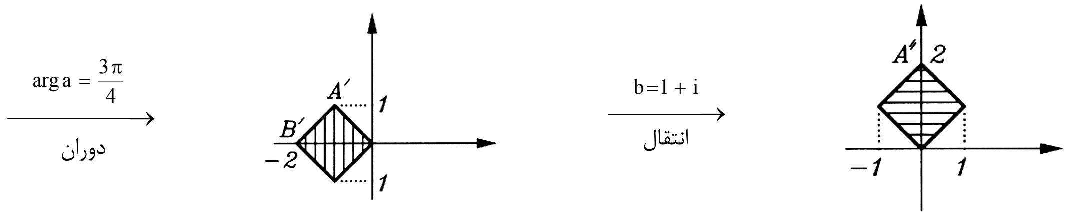
- فاصله هر نقطه را تا مبدأ، $|a|$ برابر می‌کند (انبساط یا انقباضی به اندازه $|a|$ ایجاد می‌شود).
- زاویه شعاع حامل هر نقطه را با $\operatorname{Arg} a$ جمع می‌کند (دورانی به اندازه $\operatorname{Arg} a$ حول مبدأ ایجاد می‌شود).
- طول و عرض هر نقطه را با $\operatorname{Re} b$ و $\operatorname{Im} b$ جمع می‌کند (انتقالی به اندازه b ایجاد می‌شود).

مثال : تبدیل یافته ناحیه $D=\left\{z \,\middle|\, \begin{matrix}0\le \operatorname{Re}\{z\}\le 1\\ 0\le \operatorname{Im} z\le 1\end{matrix}\right\}$ را با نگاشت $w=(-1+i)z+1+i$ به‌دست آورید.

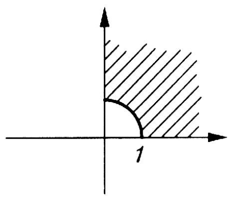
حل : با در نظر گرفتن $a=-1+i$ و $b=1+i$ یک نگاشت خطی داریم که سه عمل زیر را انجام می‌دهد:

$$a=-1+i \quad \rightarrow \quad \begin{cases}|a|=\sqrt{2}\\ \arg a=\frac{3\pi}{4}\end{cases}$$



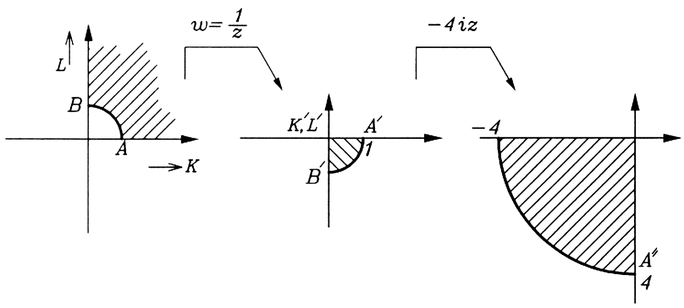


مثال : تبدیل یافته ناحیه نشان داده در شکل زیر را تحت نگاشت $w = \frac{-4i}{z}$ پیدا کنید.



حل : w را می‌توان با ترکیب از انتهای دو نگاشت زیر پیدا کرد: $w = \frac{1}{z}, -4iz$

یعنی اگر از سمت راست نگاه کنیم و به جای z در $-4iz$ عبارت $\left(\frac{1}{z}\right)$ را قرار دهیم، به نگاشت اصلی می‌رسیم. حال با دیدن اعمال نگاشت فوق از ابتدا داریم:



۳) نگاشت توانی $w = z^n$ (n عدد طبیعی مخالف یک)

نگاشت مذکور همه‌جا تحلیلی بوده و مشتق آن یعنی nz^{n-1} در همه‌جا به غیر از در $z = 0$ مخالف صفر است، لذا این نگاشت همه‌جا به غیر از در مبدأ مختصات همدیس می‌باشد.

توجه ۱ : اگر فرض کنیم $w = \rho e^{i\varphi}$ و $z = re^{i\theta}$ می‌توان نوشت:

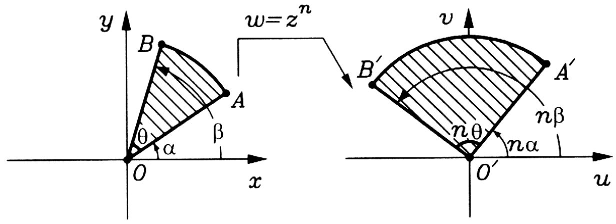
$$w = z^n \quad \rightarrow \quad \rho e^{i\varphi} = \left(r e^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \rho = r^n \\ \varphi = n\theta \end{cases}$$

یعنی نگاشت $w = z^n$ دو عمل متوالی زیر را انجام می‌دهد:

ـ فاصله هر نقطه تا مبدأ مختصات را به توان n می‌رساند.

ـ زاویه شعاع حامل هر نقطه را n برابر می‌کند.

توجه ۲ :به شکل زیر دقت کنید:



یعنی تحت نگاشت $w = z^n$ زاویه‌ای که رأس آن در مبدأ مختصات می‌باشد، با حفظ جهت، اندازه‌اش n برابر می‌شود.