ب) در انتگرال‌های شامل توابع گویا از $\cos^2 x$ و $\sin^2 x$ باتوجه به روابط :

$$\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$$

استفاده از تغییر متغیر $u = \tan x$ که نتیجه می‌دهد $du = \left(1+u^2\right) dx$ می‌تواند مفید باشد.

نکته : با استفاده از روش تغییر متغیر می‌توان نشان داد:

$$\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)} dx = \int_0^a \frac{f(a-x)}{f(x)+f(a-x)} dx = \frac{a}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^m x}{\sin^m x + \cos^m x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^m x}{\sin^m x + \cos^m x} dx = \frac{\pi}{4}$$

مثال : مطلوبست محاسبه انتگرال‌های زیر:

۱) $\mathbf{I = \int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}}$

حل : با تغییر متغیر:

$$x = u^2 \quad \to \quad dx = 2u\,du \quad \sqrt{x} = u \quad \to$$

داریم:

$$I = \int \frac{2u\,du}{u^2+u} = 2\int \frac{du}{u+1} = 2\ln|u+1| + C = 2\ln\left(\sqrt{x}+1\right) + C$$

۲) $\mathbf{I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx}$

حل : با تغییر متغیر $\sqrt{e^x-1} = u$ داریم:

$$e^x - 1 = u^2 \quad \to \quad e^x\,dx = 2u\,du \quad \to \quad dx = \frac{2u\,du}{u^2+1}$$

$$x = 0 \quad \to \quad u = \sqrt{e^0 - 1} = 0$$

$$x = \ln 2 \quad \to \quad u = \sqrt{e^{\ln 2} - 1} = 1$$

پس به‌دست می‌آید:

$$I = \int_0^1 u\frac{2u\,du}{u^2+1} = 2\int_0^1 \frac{u^2+1-1}{u^2+1} du = 2\left(u - \tan^{-1} u\right)_0^1 = 2\left[\left(1-\frac{\pi}{4}\right) - (0-0)\right]$$

۳) $\mathbf{I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{4-\cos^4 x}} dx}$

حل : با تغییر متغیر: $\cos^2 x = u$ داریم:

$$2\cos x(-\sin x)\,dx = du \quad \to \quad \sin 2x\,dx = -du$$

$$x = 0 \quad \to \quad u = \cos^2 0 = 1$$

$$x = \frac{\pi}{2} \quad \to \quad u = \cos^2\frac{\pi}{2} = 0$$

پس به‌دست می‌آید:

$$I=\int_1^0 \frac{-du}{\sqrt{4-u^2}}=-\arcsin\frac{u}{2}\Big|_1^0=-\left(0-\frac{\pi}{6}\right)$$

۴) $\mathbf{I=\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx}$

حل : با تغییر متغیر $\sqrt{x^2+1}=u$ داریم:

$$x^2+1=u^2 \quad\to\quad 2x\,dx=2u\,du$$

$$x=0 \quad\to\quad u=1$$

$$x=\sqrt{3} \quad\to\quad u=2$$

و به‌دست می‌آید:

$$I=\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2\,x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}=\int_1^2 \frac{\left(u^2-1\right)\left(u\,du\right)}{u}=\left(\frac{u^3}{3}-u\right)\Big|_1^2=\frac{4}{3}$$

۵) $\mathbf{I=\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx}$

حل : با تغییر متغیر $x=\sin\theta$ داریم:

$$dx=\cos\theta\,d\theta$$

$$x=0 \quad\to\quad \sin\theta=0 \quad\to\quad \theta=0$$

$$x=1 \quad\to\quad \sin\theta=1 \quad\to\quad \theta=\frac{\pi}{2}$$

$|\cos\theta|=\cos\theta$ در نتیجه:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\overbrace{\left(\sqrt{1-\sin^2\theta}\right)}^{|\cos\theta|}\left(\cos\theta\,d\theta\right) \quad\to\quad I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)^2 d\theta=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\theta\,d\theta=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4\theta}{2}d\theta=\frac{1}{8}\left(\theta-\frac{1}{4}\sin 4\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{16}$$

۲) روش جزء به جزء

اساس روش جزء به جزء آن است که برای دو تابع $u\,,\,v$ داریم:

$$\int u\,.\,dv=uv-\int v\,du$$

مثال : مطلوبست محاسبه انتگرال‌های زیر:

۱) $I = \int x \sec^2 x \, dx$

حل : با روش جزء به جزء داریم:

$$\begin{cases} x = u \\ \sec^2 x \, dx = dv \end{cases} \rightarrow \begin{cases} dx = du \\ \tan x = v \end{cases}$$

$$I = x \tan x - \int \tan x \, dx = x \tan x + \ln|\cos x| + C$$

۲) $I = \int x^3 (\ln x)^2 \, dx$

حل : با تغییر متغیر $\ln x = u$ داریم:

$$\frac{1}{x} dx = du \rightarrow dx = x \, du \rightarrow dx = e^u \, du$$

به‌دست می‌آید:

$$I = \int \left(e^u\right)^3 . (u)^2 \left(e^u \, du\right) = \int u^2 e^{4u} \, du$$

مشتق		انتگرال
u^2		e^{4u}
	+	
$2u$		$\frac{1}{4} e^{4u}$
	−	
2		$\frac{1}{16} e^{4u}$
	+	
0		$\frac{1}{64} e^{4u}$

پس:

$$I = \left(\frac{u^2}{4} - \frac{2u}{16} + \frac{2}{64}\right) e^{4u} \xrightarrow{u = \ln x} I = \left(\frac{(\ln x)^2}{4} - \frac{\ln x}{8} + \frac{1}{32}\right) . x^4$$

۳) $I = \int \sin(2 \ln x) \, dx$

حل : با تغییر متغیر $\ln x = t$ داریم:

$$\frac{dx}{x} = dt \rightarrow dx = e^t \, dt$$

به‌دست می‌آید:

$$I = \int \sin(2t) \; e^t \, dt$$

انتگرال		مشتق
e^t		$\sin 2t$
e^t	$+$	$2\cos 2t$
e^t	$-$	$-4\sin 2t$
	$\int +$	

پس:

$$I = e^t \,.\, \sin 2t - e^t \,.\, 2\cos 2t - \overbrace{\int 4\, e^t \sin 2t \, dt}^{4I}$$

$$I = \frac{1}{5}\left(e^t \sin 2t - 2\, e^t \cos 2t \right) \xrightarrow{t = \ln x} I = \frac{1}{5}\left(x \sin\left(2\ln x\right) - 2x\cos\left(2\ln x\right)\right)$$

۴) $\mathbf{I = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{6}{x^4}\right) e^{-x}\, dx}$

حل : اگر برای محاسبه $A = \int \frac{1}{x} e^{-x}\, dx$ از روش جزء به جزء استفاده کنیم، داریم:

انتگرال		مشتق
e^{-x}		$\frac{1}{x}$
$-e^{-x}$	$+$	$-\frac{1}{x^2}$
e^{-x}	$-$	$\frac{2}{x^3}$
$-e^{-x}$	$+$	$-\frac{6}{x^4}$
	$\int -$	

پس داریم:

$$\int \frac{1}{x} e^{x}\, dx = -\frac{e^{-x}}{x} + \frac{e^{-x}}{x^2} - \frac{2\, e^{-x}}{x^3} - \int \frac{6}{x^4} e^{-x}\, dx$$

بنابراین:

$$\int \left(\frac{1}{x} + \frac{6}{x^4}\right) e^{-x}\, dx = -\frac{e^{-x}}{x} + \frac{e^{-x}}{x^2} - \frac{2\, e^{-x}}{x^3}$$