

ب) در انتگرال‌های شامل توابع گویا از $\sin^2 x$ و $\cos^2 x$ با توجه به روابط :

$$\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

استفاده از تغییر متغیر $u = \tan x$ که نتیجه می‌دهد $du = (1 + u^2) dx$ می‌تواند مفید باشد.

نکته : با استفاده از روش تغییر متغیر می‌توان نشان داد:

$$\int_0^a \frac{f(x)}{f(x) + f(a-x)} dx = \int_0^a \frac{f(a-x)}{f(x) + f(a-x)} dx = \frac{a}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^m x}{\sin^m x + \cos^m x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^m x}{\sin^m x + \cos^m x} dx = \frac{\pi}{4}$$

مثال : مطلوبست محاسبه انتگرال‌های زیر:

$$۱) I = \int \frac{dx}{x + \sqrt{x}}$$

حل : با تغییر متغیر:

$$x = u^2 \rightarrow dx = 2u du \quad \sqrt{x} = u \rightarrow$$

داریم:

$$I = \int \frac{2u du}{u^2 + u} = 2 \int \frac{du}{u+1} = 2 \ln |u+1| + C = 2 \ln (\sqrt{x} + 1) + C$$

$$۲) I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$$

حل : با تغییر متغیر $\sqrt{e^x - 1} = u$ داریم:

$$e^x - 1 = u^2 \rightarrow e^x dx = 2u du \rightarrow dx = \frac{2u du}{u^2 + 1}$$

$$x = 0 \rightarrow u = \sqrt{e^0 - 1} = 0$$

$$x = \ln 2 \rightarrow u = \sqrt{e^{\ln 2} - 1} = 1$$

پس به دست می‌آید:

$$I = \int_0^1 u \frac{2u du}{u^2 + 1} = 2 \int_0^1 \frac{u^2 + 1 - 1}{u^2 + 1} du = 2 \left(u - \tan^{-1} u \right)_0^1 = 2 \left[\left(1 - \frac{\pi}{4} \right) - (0 - 0) \right]$$

$$۳) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{4 - \cos^4 x}} dx$$

حل : با تغییر متغیر: $\cos^2 x = u$ داریم:

$$2 \cos x (-\sin x) dx = du \rightarrow \sin 2x dx = -du$$

$$x = 0 \rightarrow u = \cos^2 0 = 1$$

$$x = \frac{\pi}{2} \rightarrow u = \cos^2 \frac{\pi}{2} = 0$$

پس به دست می آید:

$$I = \int_1^0 \frac{-du}{\sqrt{4-u^2}} = -\arcsin \frac{u}{2} \Big|_1^0 = -\left(0 - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$۴) I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

حل : با تغییر متغیر $\sqrt{x^2+1} = u$ داریم:

$$x^2 + 1 = u^2 \rightarrow 2x dx = 2u du$$

$$x = 0 \rightarrow u = 1$$

$$x = \sqrt{3} \rightarrow u = 2$$

و به دست می آید:

$$I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2 x dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int_1^2 \frac{(u^2-1)(u du)}{u} = \left(\frac{u^3}{3} - u\right) \Big|_1^2 = \frac{4}{3}$$

$$۵) I = \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$$

حل : با تغییر متغیر $x = \sin \theta$ داریم:

$$dx = \cos \theta d\theta$$

$$x = 0 \rightarrow \sin \theta = 0 \rightarrow \theta = 0$$

$$x = 1 \rightarrow \sin \theta = 1 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

در نتیجه: $|\cos \theta| = \cos \theta$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \overbrace{\left(\sqrt{1-\sin^2 \theta}\right)}^{|\cos \theta|} (\cos \theta d\theta) \rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta\right)^2 d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4\theta}{2} d\theta = \frac{1}{8} \left(\theta - \frac{1}{4} \sin 4\theta\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8} \left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{16}$$

۲) روش جزء به جزء

اساس روش جزء به جزء آن است که برای دو تابع u, v داریم:

$$\int u \cdot dv = uv - \int v du$$

مثال : مطلوبست محاسبه انتگرال‌های زیر:

$$۱) I = \int x \sec^2 x \, dx$$

حل : با روش جزء به جزء داریم:

$$\begin{cases} x = u \\ \sec^2 x \, dx = dv \end{cases} \rightarrow \begin{cases} dx = du \\ \tan x = v \end{cases}$$

$$I = x \tan x - \int \tan x \, dx = x \tan x + \ln |\cos x| + C$$

$$۲) I = \int x^3 (\ln x)^2 \, dx$$

حل : با تغییر متغیر $\ln x = u$ داریم:

$$\frac{1}{x} dx = du \rightarrow dx = x \, du \rightarrow dx = e^u \, du$$

به‌دست می‌آید:

$$I = \int (e^u)^3 \cdot (u)^2 (e^u \, du) = \int u^2 e^{4u} \, du$$

مشتق	انتگرال
u^2	e^{4u}
$2u$	$\frac{1}{4} e^{4u}$
2	$\frac{1}{16} e^{4u}$
0	$\frac{1}{64} e^{4u}$

پس:

$$I = \left(\frac{u^2}{4} - \frac{2u}{16} + \frac{2}{64} \right) e^{4u} \xrightarrow{u = \ln x} I = \left(\frac{(\ln x)^2}{4} - \frac{\ln x}{8} + \frac{1}{32} \right) \cdot x^4$$

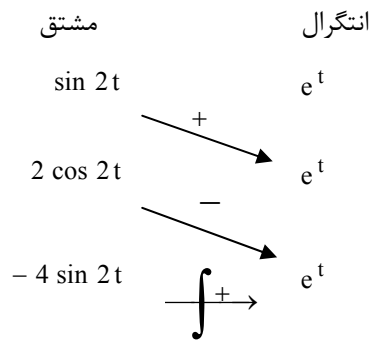
$$۳) I = \int \sin(2 \ln x) \, dx$$

حل : با تغییر متغیر $\ln x = t$ داریم:

$$\frac{dx}{x} = dt \rightarrow dx = e^t \, dt$$

به‌دست می‌آید:

$$I = \int \sin(2t) e^t \, dt$$



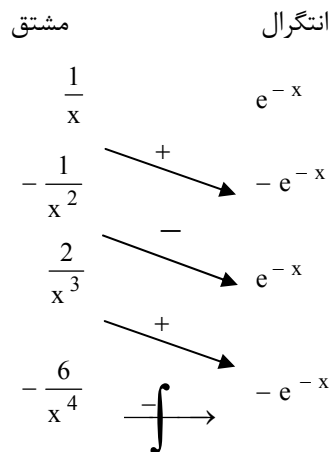
پس:

$$I = e^t \cdot \sin 2t - e^t \cdot 2 \cos 2t - \int 4 e^t \sin 2t dt$$

$$I = \frac{1}{5} (e^t \sin 2t - 2 e^t \cos 2t) \xrightarrow{t = \ln x} I = \frac{1}{5} (x \sin(2 \ln x) - 2x \cos(2 \ln x))$$

$$۴) I = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{6}{x^4} \right) e^{-x} dx$$

حل : اگر برای محاسبه $A = \int \frac{1}{x} e^{-x} dx$ از روش جزء به جزء استفاده کنیم، داریم:



پس داریم:

$$\int \frac{1}{x} e^{-x} dx = -\frac{e^{-x}}{x} + \frac{e^{-x}}{x^2} - \frac{2e^{-x}}{x^3} - \int \frac{6}{x^4} e^{-x} dx$$

بنابراین:

$$\int \left(\frac{1}{x} + \frac{6}{x^4} \right) e^{-x} dx = -\frac{e^{-x}}{x} + \frac{e^{-x}}{x^2} - \frac{2e^{-x}}{x^3}$$