در نتیجه ریشه‌های حقیقی f' ، ۰ و ۱ است در صورتیکه $p-q$ فرد باشد و ۰ و ۱± است اگر $p-q$ زوج باشد.

توجه کنید تا مشتق $(p-1)$-ام f در صفر، صفر می‌شود !! $f^{(p)}(0) = -qp!$

اگر p فرد باشد که صفر نه ماکسیمم موضعی است نه مینیمم موضعی. اگر p زوج باشد چون $f^{(p)}(0)<0$ ماکسیمم موضعی است.

$f'(1) = 0$ و $f''(1) = (q-1)pq - (p-1)pq > 0$

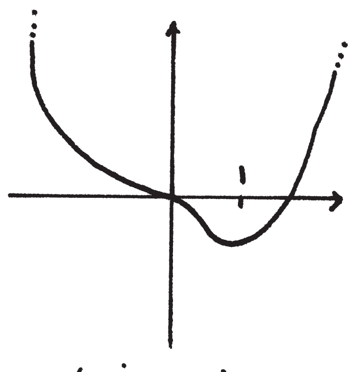
چون ۲ زوج است در نتیجه با توجه به آزمون مشتق دوم داریم ۱ مینیمم موضعی است.

فرض کنید $q-p$ زوج باشد در این صورت: $f'(-1)=0$ و $f''(-1) = pq\left((-1)^q(q-1)-(-1)^p(p-1)\right)$

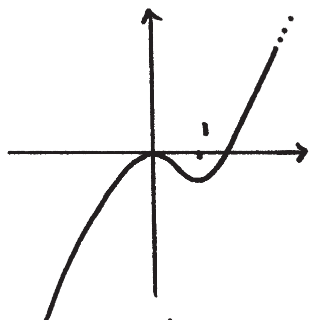
اگر q زوج باشد $f''(-1)>0$ پس ۱- نیز مینیمم موضعی است.

اگر q فرد باشد چون $q-p$ زوج است پس p نیز فرد است در نتیجه $f''(-1)<0$ پس ماکسیمم موضعی است.

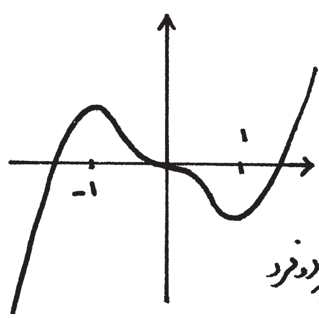
پس در مجموع چهار نمودار می‌کشیم $q-p$ فرد و p زوج یا فرد و $q-p$ زوج، q زوج یا فرد باشد.



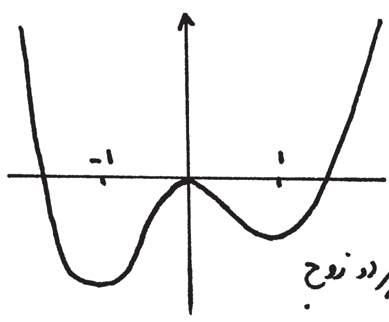
$q-p$ فرد و p فرد است.



$q-p$ فرد و p زوج است



p و q هر دو فرد



p و q هر دو زوج

۱۰. فرض کنید n عدد طبیعی باشد و تابع زیر را در نظر بگیرید.

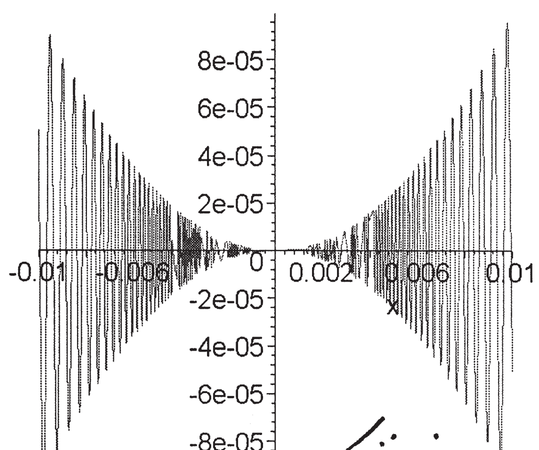
$$f(x)=\begin{cases} x^n \sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

ثابت کنید این تابع f در نقطه ۰، $(n-1)$ بار مشتق‌پذیر است و

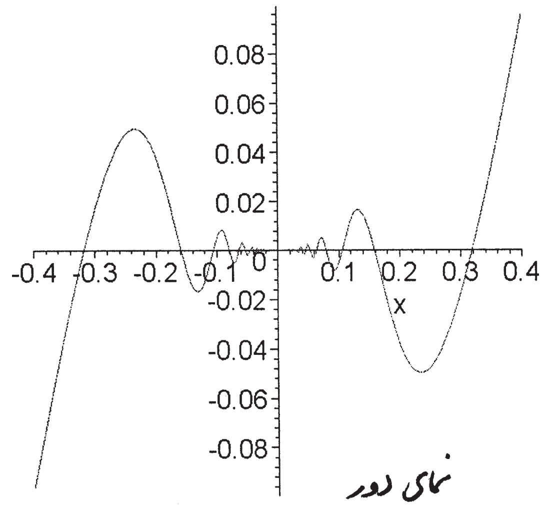
$$f'(0)=f''(0)=\dots=f^{(n-1)}(0)=0$$

اما در نقطه ۰ مشتق nام ندارد. آیا ۰ ماکسیمم موضعی f است؟ نقطه مینیمم موضعی چطور؟ نقطه عطف چطور؟ نمودار f را رسم کنید.

حل: این سؤال با این صورت مشکل دارد. ثابت می‌کنیم f در ۰، $[\frac{n}{2}]$ بار مشتق دارد. این ادعا را با استقرا ثابت می‌کنیم. برای $n=1$ چون حد زیر وجود ندارد پس در صفر مشتق‌پذیر نیست. $\lim_{h\to 0}\frac{h\sin\frac{1}{h}}{h}=\lim_{h\to 0}\sin\frac{1}{h}$



نمای نزدیک



نمای دور

وضعیت مشابه برای $x\cos\frac{1}{x}$ برقرار است پس فرض کنید، با استقرا $x^n\sin\frac{1}{x}$ و $x^n\cos\frac{1}{x}$ در صفر، $[\frac{n}{2}]$ بار

چون $1<n+1$ پس $\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor$ مشتق‌پذیر است. در صفر $x^{n+1}\sin\frac{1}{x}$ ثابت می‌کنیم، مشتق‌پذیر هستند $x^{n+1}\sin\frac{1}{x}$

در صفر مشتق دارند (با توجه به قسمت ج سوال ۲ بخش ۵) و تابع مشتق بصورت مقابل است.

$$\begin{cases} (n+1)x^n\sin\frac{1}{x}-x^{n-1}\cos\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

چون $x^{n-1}\cos\frac{1}{x}$ در صفر $\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$ مشتق‌پذیر است و $(n+1)x^n\sin\frac{1}{x}$ طبق استقرا در صفر $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ مشتق‌پذیر است در نتیجه تفاضل این دو در صفر $\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$ مشتق‌پذیر است. پس $x^{n+1}\sin\frac{1}{x}$ در صفر $\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor+1$ بار مشتق‌پذیر است که این همان مقدار $\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor$ است.

دنباله $a_n=\frac{1}{2\pi n+\frac{3\pi}{2}}$ را در نظر بگیرید چون این دنباله از سمت راست به صفر نزدیک می‌شود ولی مقدار $f(a_k)$ به سادگی بدست می‌آید که برابر است با

$$f(a_k)=\left(\frac{1}{2k\pi+\frac{3\pi}{2}}\right)^n(-1)$$

اما دنباله $b_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$ مانند a_n از سمت راست به صفر میل می‌کند ولی

$$f(b_k)=\left(\frac{1}{2k\pi+\pi/2}\right)^n(+1)$$

در نتیجه در هر نیم بازه‌ای حول صفر هم مقادیر مثبت گرفته می‌شود و هم منفی پس در نتیجه اکسترمم موضعی نیست.

اما مشتق دوم در صورت وجود (برای $n\geqslant 4$ وجود دارد) نیز حول صفر نامتناهی بار تغییر علامت می‌دهد

مشتق دوم در صورت وجود

$$=\begin{cases} \frac{x^n n^2\sin\frac{1}{x}}{x^2}-\frac{x^n n\sin\frac{1}{x}}{x^2}-\frac{2x^n n\cos\frac{1}{x}}{x^3}-\frac{x^n\sin\frac{1}{x}}{x^4}+\frac{2x^n\cos\frac{1}{x}}{x^3} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

که در دنباله $a_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$ مثبت و در دنباله $b_n=\frac{1}{2n\pi}$ منفی است در نتیجه نقطه عطف نمی‌تواند باشد.

۱۱. فرض کنید تابع در نقطه a دوبار مشتق‌پذیر است. ثابت کنید

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}=f''(a)$$

حل: چون تابع f دوبار مشتق‌پذیر است در نقطه a پس چندجمله‌ای تیلور مرتبه ۲ را حول نقطه a درنظر بگیرید.

تیلور مرتبه ۲ حول a $= P_2(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$

بنابر قضیه ٤ همین بخش داریم.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-P_2(a+h)}{h^2}=0 \Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-f'(a)h-\frac{1}{2}f''(a)h^2}{h^2}=0 \quad (1)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-P_2(a-h)}{h^2}=0 \Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)+f'(a)h-\frac{1}{2}f''(a)h^2}{h^2}=0 \quad (2)$$

روابط (۱) و (۲) را باهم جمع کنید نتیجه می‌شود

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)-f''(a)h^2}{h^2}=0$$

که همان حکم مسئله است.

۱۲. فرض کنید تابع f در نقطه a دوبار مشتق‌پذیر است و $f'(a)=0$. ثابت کنید $\lim\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h^2}=0$.

حل: مانند مسئله قبل فرض کنید $P_2(x)$ چندجمله‌ای تیلور مرتبه ۲ حول نقطه a باشد در این صورت بنابر قضیه ٤ همین بخش داریم.

$$P_2(a\pm h)=f(a)\pm f'(a)h+\frac{1}{2}f''(a)h^2$$

$$=f(a)+\frac{1}{2}f''(a)h^2$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-P_2(a+h)}{h^2}=0 \Longrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-\frac{1}{2}f''(a)h^2}{h^2}=0 \quad (1)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-p_2(a-h)}{h^2}=0 \Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)-\frac{1}{2}f''(a)h^2}{h^2}=0 \qquad (2)$$

رابطه (۱) و (۲) از هم کم کنید بدست می‌آید:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h^2}=0$$

۱۳. الف) گزاره ۱۰ را ثابت کنید. (راهنمایی: از استدلال شبیه برهان گزاره ۹ بخش ۴ استفاده کنید.)

ب) گزاره ۹ را ثابت کنید. (راهنمایی: از استدلال شبیه برهان گزاره ۱۰ بخش ۴ استفاده کنید.)

حل: ب) چون $f(a)=f(b)=0$ در نتیجه طبق قضیه رل وجود دارد $c_1\in(a,b)$ که $f'(c_1)=0$

دوباره چون $f'(c_1)=f'(a)=0$ و چون f' مشتق‌پذیر است در نتیجه بین a و c_1، c_2 وجود دارد که $f''(c_2)=0$ و دوباره

چون $f''(c_2)=f''(a)=0$ پس بین c_2 و a، c_3 وجود دارد که $f'''(c_3)=0$ همین استدلال را ادامه می‌دهیم تا برسیم

که چون $f^{(k)}(c_k)=f^{(k)}(a)=0$ و f، $k+1$ - بار مشتق‌پذیر است در نتیجه وجود دارد c_{k+1} که $f^{(k+1)}(c_{k+1})=0$.

و این همان حکم (ب) است.

گزاره ۱۰ در این بخش نداریم احتمالاً منظور قضیه ۸ بوده است. ما قضیه ۸ را ثابت می‌کنیم.

$$p_k(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

$$r_k(x)=f(x)-p_k(x)$$

قرار دهید.

بدون از دست رفتن کلیت فرض کنید $a<x$، روی بازه $[a,x]$ تابع کمکی

$$\varphi(z)=f(x)-\left(f(z)+\frac{f'(z)}{1!}(x-z)+\cdots+\frac{f^{(n)}}{n!}(x-z)^n\right)$$

در این صورت داریم.

$$\varphi(a)=r_k(x) \quad \text{و} \quad \varphi(x)=0$$

علاوه بر این چون φ' روی بازه (a,x) وجود دارد.

$$\varphi'(z) = -\Big(f'(z) + f'(z)(-1) + f''(z)(x-z) + f''(z)(z-x) + f'''(z)\frac{(x-z)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(k+1)}(z)}{n!}(x-z)^k \Big) = -\frac{f^{(k+1)}(z)}{k!}(x-z)^k$$

چون طبق قضیه مقدار میانگین تعمیم یافته (اثبات مشابه مقدار میانگین معمولی)

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\psi(x)-\psi(a)} = \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)}$$

که $\psi(x)$ تابعی پیوسته که مشتق آن روی بازه $[a,x)$ صفر نمی‌شود.

با جایگذاری $\psi(z)=(x-z)^{n+1}$ و $\varphi(x)$ ، $\varphi(a)$ داریم.

$$r_k(x) = \frac{-(x-a)^{k+1}}{(k+1)(x-c)^k}\Big(-\frac{f^{(k+1)}(c)}{k!}(x-c)^k\Big) = \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1}$$

این اثبات جالب منسوب به روش شلومیخ است.

یادداشت: قضیه مقدار میانگین تعمیم یافته می‌گوید اگر $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ و $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ پیوسته روی (a,b) مشتق‌پذیر باشد در این صورت وجود دارد $\xi\in(a,b)$ که

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

اثبات: تابعی مانند $h(x)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$h(x) = f(x)\big(g(b)-g(a)\big) - g(x)\big(f(b)-f(a)\big) - f(a)g(b) + f(b)g(a)$$

با توجه به فرض در مورد f و g ، h نیز روی $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) مشتق‌پذیر است. چون $h(b)=h(a)$ و هر دو برابر صفر هستند در نتیجه وجود دارد $\xi\in(a,b)$ که $h'(\xi)=0$ که این بیان حکم مسئله است

(البته ما فرض کردیم که g' روی (a,b) صفر نمی‌شود.)

فصل ۴ انتگرال

بخش ۱ فصل ۴

۱. سهمی $y=kx^2$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید که به ازای هر دو نقطه روی سهمی، مانند A و B، نقطه‌ای یکتا مانند C، روی سهمی و بین A و B وجود دارد که مماس بر سهمی در نقطه C موازی وتر AB است.

حل. مختصات A، B و C را به ترتیب با (x_A,y_A)، (x_B,y_B) و (x_C,y_C) نمایش می‌دهیم. برای موازی بودن پاره خط AB و مماس بر سهمی در C باید شیب AB و مماس باهم برابر باشند. شیب پاره خط AB برابر $\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$ است و شیب مماس هم برابر مشتق تابع $f(x)=kx^2$ در نقطهٔ x_C است که برابر است با $f'(x_C)=kx_C$. ولی با توجه به اینکه $y_A=f(x_A)$ و $y_B=f(x_B)$ حکم مسئله معادل قضیهٔ مقدار میانگین می‌شود. یعنی طبق این قضیه نقطهٔ C بین A, B وجود دارد که $f'(x_C)=\frac{f(x_B)-f(x_A)}{x_B-x_A}$ و در نتیجه مسئله حل می‌شود.

۲. نقاط A، B و C مانند تمرین ۱ هستند. فرض کنید نقطهٔ D روی کمان AC طوری قرار گرفته است که مماس بر سهمی در نقطهٔ D موازی AC است. ثابت کنید مساحت مثلث ADC یک هشتم مثلث ACB است.

حل. معادلهٔ خط گذرنده از A و C عبارت است از $y=mx+b$ که در آن

m برابر $\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}$ و b برابر y_A-mx_A است (با توجه به تمرین 1، بند الف از بخش ۳.۱)

یا معادلهٔ $y-mx-b=0$. برای اینکه نشان دهیم مساحت مثلث ADC یک هشتم

مثلث ACB است، با توجه به اشتراک این دو مثلث در ضلع AC کافی است نشان دهیم فاصلهٔ نقطهٔ

D از AC برابر یک هشتم فاصله B از AC است. با توجه به معادلهٔ خط گذرنده از AC فاصلهٔ D از این خط

برابر $\frac{|y_D-mx_D-b|}{\sqrt{1+m^2}}$ است. با توجه به تمرین 1 می‌دانیم

$$f'(x_D)=\frac{f(x_A)-f(x_C)}{x_A-x_C} \Rightarrow 2kx_D=\frac{k(x_A^2-x_C^2)}{x_A-x_C}$$

و در نتیجه $2x_D=x_A+x_C$ و به طور مشابه $2x_C=x_A+x_B$. بنابراین فاصلهٔ D از AC

برابر است با

$$\frac{|kx_D^2-mx_D-b|}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{|k(\frac{x_A+x_C}{2})^2-m(\frac{x_A+x_C}{2})-b|}{\sqrt{1+m^2}}.$$

همچنین این فاصله برای B برابر است با

$$\frac{|kx_B^2-mx_B-b|}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{|k(2x_C-x_A)^2-m(2x_C-x_A)-b|}{\sqrt{1+m^2}}$$

بنابراین با مقایسه این دو رابطه و جایگذاری m، b باید نشان دهیم

$$8\left|k\left(\frac{x_A+x_C}{2}\right)^2-k(x_A+x_C)\left(\frac{x_A+x_C}{2}\right)-kx_A^2+k(x_A+x_C)x_A\right|$$

$$=\left|k(2x_C-x_A)^2-k(x_A+x_C)(2x_C-x_A)-kx_A^2+k(x_A+x_C)x_A\right|.$$

(توجه کنید که $m=\frac{k(x_A^2-x_C^2)}{x_A-x_C}=k(x_A+x_B)$.) با حذف k از دو طرف معادله باید نشان دهیم

$$8\left|-\left(\frac{1}{4}x_A^2+\frac{1}{4}x_C^2\right)+\frac{x_Cx_A}{2}\right|=\left|2x_A^2+2x_C^2-4x_Cx_A\right|.$$

و بنابراین حکم به دست می‌آید.

۳. به استقرا (یا روشی دیگر) دستورهای زیر را ثابت کنید.

الف) $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ ؛ ب) $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ؛

پ) $1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

حل. الف) حکم هر سه قسمت را با استقرا ثابت می‌کنیم. برای $n=1$ که حکم هر سه واضح است.

فرض کنید که الف) را برای n ثابت کرده‌ایم. بنابراین

$$1+2+\cdots+n+1=\frac{n(n+1)}{2}+n+1=(n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

ب) با فرض حکم برای n خواهیم داشت

$$1^2+2^2+\cdots+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\frac{n+1}{6}\left(2n^2+n+6(n+1)\right)$$

$$=\frac{n+1}{6}(2n^2+7n+6)=\frac{n+1}{6}(2n+3)(n+2).$$

ج) با فرض حکم برای n خواهیم داشت

$$1^3+2^3+\cdots+(n+1)^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3=\frac{(n+1)^2}{4}(n^2+4n+4)=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

۴. فرض کنید p عددی طبیعی باشد. ثابت کنید مجموع $1^p+2^p+\cdots+n^p$ یک چندجمله‌ای برحسب n است که در آن $\frac{n^{p+1}}{p+1}$ جمله‌ای که درجه‌اش از بقیه بیشتر است. (راهنمایی: می‌توانید با استفاده از دستور بسط دوجمله‌ای، $(j+1)^p-j^p$ را بسط دهید و سپس $\sum_{j=0}^{n}((j+1)^p-j^p)$ را حساب کنید.)

حل. حکم را با استقرا روی p نشان می‌دهیم. برای $p=1$ که حکم از قسمت الف) تمرین ۳ به دست می‌آید. فرض کنید برای $p-1$ حکم را نشان داده‌ام. حال عبارت $(j+1)^{p+1}-j^{p+1}$ را با استفاده از

دستور بسط دوجمله‌ای حساب می‌کنیم.

$$(j+1)^{p+1}-j^{p+1}=\sum_{k=0}^{p}\binom{p+1}{k}j^k.$$

بنابراین

$$n^{p+1}=\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)^{p+1}-j^{p+1}=\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{p}\binom{p+1}{k}j^k=\sum_{k=0}^{p}\binom{p+1}{k}\sum_{j=0}^{n-1}j^k.$$

طبق فرض استقرا اگر $k<p$، $\sum_{j=0}^{n-1}j^k$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ حداکثر p است و در نتیجه $Q(n)=\sum_{k=0}^{p-1}\binom{p+1}{k}\sum_{j=0}^{n-1}j^k$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ حداکثر p است. بنابراین

$$n^{p+1}-Q(n)=(p+1)\sum_{j=0}^{n-1}j^p\Rightarrow\sum_{j=0}^{n-1}j^p=\frac{n^{p+1}}{p+1}-\frac{Q(n)}{p+1}.$$

بنابراین حکم به دست می‌آید. (توجه کنید اگر به جای n، $n+1$ بگذاریم باز هم جملهٔ با بزرگ‌ترین درجه همان $\frac{n^{p+1}}{p+1}$ است.)

۵. ثابت کنید که اگر p عددی طبیعی باشد

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\left(\sqrt[p]{1/n}+\sqrt[p]{2/n}+\cdots+\sqrt[p]{\frac{n}{n}}\right)\right)=\frac{p}{p+1}.$$

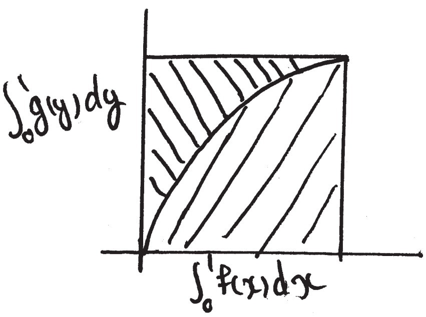
(راهنمایی: از نتیجهٔ مثال ۷ استفاده کنید.)

حل. تابع $f(x)=\sqrt[p]{x}$ را روی بازه $[0,1]$ در نظر بگیرید. این تابع تابعی پیوسته است. عبارت بالا برای هر n مجموع ریمانی نظیر افراز $x_0=0, x_1=1/n, \ldots, x_n=n/n=1$ ($x_i^*=\frac{i}{n}$) برای انتگرال $\int_0^1 f(x)dx$ است. با توجه به این که ضخامت این افرازها $1/n$ است، بنابراین وقتی n به سمت بی‌نهایت می‌رود ضخامت این‌ها به صفر میل می‌کند و بنابراین حد عبارت بالا برابر $\int_0^1 f(x)dx$ است. ولی برای محاسبه این انتگرال توجه کنید که اگر $y=f(x)=\sqrt[p]{x}$، آنگاه $x=g(y)=y^p$. $\int_0^1 f(x)dx$ ناحیه

زیر نمودار تابع f را مساحتش را حساب می‌کند و $\int_0^1 g(y)dy$ مساحت ناحیه سمت چپ نمودار را. (توجه کنید که تابع $y=f(x)=\sqrt[p]{x}$ از محور y-ها به صورت $x=g(y)=y^p$ دیده می‌شود.) بنابراین با توجه به شکل زیر مجموع این دو انتگرال برابر 1 یعنی مساحت مربع واحد می‌شود. بنابراین با توجه به نتیجه مثال ۷

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\left(\sqrt[p]{\frac{1}{n}}+\sqrt[p]{\frac{2}{n}}+\dots+\sqrt[p]{\frac{n}{n}}\right)\right)=\int_0^1 f(x)dx=1-\int_0^1 g(y)dy=1-\frac{1}{p+1}=\frac{p}{p+1}$$

(نکته: منظور از $\int f(x)dx$ این است که مساحت محصور بین نمودار و محور xها را حساب می‌کنیم و از $\int g(y)dy$ این است که مساحت محصور بین نمودار و محور yها را.)



۶. الف) فرض کنید که $c_1,\dots,c_k$ نقاطی متمایز در بازهٔ $[a,b]$ باشند و $C_1,\dots,C_k$ اعدادی حقیقی و دلخواه. تابع $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ را به صورت

$$g(x)=\begin{cases} C_i & x=c_i \quad i=1,\dots,k \\ 0 & x\notin\{c_1,\dots,c_k\} \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. ثابت کنید g انتگرال‌پذیر است و $\int_a^b g=0$.

ب) فرض کنید $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته و c_1 تا c_k نقاطی متمایز در بازهٔ $[a,b]$ باشند و C_1 تا C_k اعداد حقیقی دلخواه. ثابت کنید تابع

$$g(x)=\begin{cases} c_i & x=c_i,\quad i=1,\dots,k \\ f(x) & x\notin\{c_1,\dots,c_k\}\end{cases}$$

انتگرال‌پذیر است و $\int_a^b f=\int_a^b g$.

حل. الف) فرض کنید $M=\max\{|c_i|\,|\,i=1,\dots,k\}$. برای $\varepsilon>0$، نشان می‌دهیم که برای هر افراز P که ضخامت آن کمتر از $\frac{\varepsilon}{2kM}$ باشد، هر مجموع ریمانی نظیر آن افراز حداکثر به اندازهٔ ε از صفر فاصله دارد. برای اثبات این مطلب فرض کنید که $P=\{a=x_0\le x_1\le\dots\le x_n=b\}$ و $x_i^*\in[x_{i-1},x_i]$.

توجه کنید که هر c_i حداکثر در ۲ زیربازهٔ افرازی آید و در نتیجه حداکثر $2k$ زیربازه شامل حداقل یکی از c_iها است.

بنابراین

$$\left|\sum_{i=1}^{n} g(x_i^*)(x_i-x_{i-1})\right|\le\sum_{i=1}^{n}|g(x_i^*)|(x_i-x_{i-1})=\sum_{x_i^*\in\{c_1,\dots,c_k\}}|g(x_i^*)|(x_i-x_{i-1})$$

$$\le 2kM\times\frac{\varepsilon}{2kM}=\varepsilon.$$

ب) کافی است در گزارهٔ ۱.۰ قسمت الف) $\tilde{g}$ را به صورت زیر تعریف کنید و از حکم گزاره استفاده کنید.

$$\tilde{g}(x)=\begin{cases} c_i-f(x) & x=c_i\quad i=1,\dots,k \\ 0 & x\notin\{c_1,\dots,c_k\}\end{cases}$$

توجه کنید که طبق قسمت الف، $\tilde{g}$ انتگرال‌پذیر است و $g=\tilde{g}+f$ و بنابراین با توجه به گزاره ۱.۰ هر دو قسمت حکم به دست می‌آید.

۷. فرض کنید $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ تابع انتگرال‌پذیری باشد. مقدار f را در یک نقطه از $[a,b]$ مانند c تغییر می‌دهیم تا تابعی جدید مانند $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ به دست آید. ثابت کنید g نیز انتگرال‌پذیر است و $\int_a^b f=\int_a^b g$.

حل. کافی است تابع h را در نقطهٔ c برابر $g(c)-f(c)$ و در بقیه نقاط هم برابر صفر تعریف کنید. با توجه به قسمت الف) تمرین ۶، h انتگرال‌پذیر است و $\int_a^b h=0$. حکم مسئله با توجه به اینکه $g=f+h$ است و قسمت الف) گزارهٔ ۱۰ به دست می‌آید.

۸. فرض کنید تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر باشد و $a<c<d<b$. تابع $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ را به صورت

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & c<x<d \\ 0 & x<c \text{ یا } x>d \\ \text{دلخواه} & x=c \text{ یا } x=d \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. ثابت کنید g انتگرال‌پذیر است.

حل. فرض کنید که برای $\varepsilon>0$، $\delta>0$ به گونه‌ای باشد که برای هر افراز با ضخامت کمتر از δ_1 و مجموع ریمانی نظیر آن، اختلاف این مجموع ریمانی و $\int_a^b f$ کمتر از $\varepsilon/4$ باشد. (می‌دانیم این δ_1 طبق فرض انتگرال‌پذیری وجود دارد.) بنابراین برای هر چنین افرازی

$$M(P,f)-m(P,f)=\left(M(P,f)-\int_a^b f\right)+\left(\int_a^b f-m(P,f)\right)$$
$$\leq \varepsilon/4+\varepsilon/4=\varepsilon/2$$