حال کانولوشن مطلوب عبارتست از:

$$\begin{aligned} y[n] &= h[n] * x[x] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(1/3\right)^{-k} \left(1/4\right)^{n-k} u[n-k+3] \\ &+ \sum_{k=\circ}^{\infty} \left(1/3\right)^{k} \left(1/4\right)^{n-k} u[n-k+3] \\ &= \left(1/12\right) \sum_{k=\circ}^{\infty} \left(1/3\right)^{k} \left(1/4\right)^{n+k} u(n+k+4) \\ &+ \sum_{k=\circ}^{+\infty} \left(1/3\right)^{k} \left(1/4\right)^{n-k} u[n-k+3] \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن هر کدا م از سری های در معادله فوق به صورت جداگانه، می توان نشان داد که:

$$y[n] = \begin{cases} \left((12) 4/11\right) 3^{n} & n < -4 \\ \left(1/11\right) 4^{4} & n = -4 \\ \left(1/4\right)^{n} \left(1/11\right) + (-3)\left(1/4\right)^{n} + 3(256)\left(1/3\right)^{n} & n \geq -3 \end{cases}$$

(ب) حال کانولوشن را در نظر بگیرید:

$$y_1[n] = \left[\left(1/3\right)^{n} u[n]\right] * \left[\left(1/4\right)^{n} u[n+3]\right]$$

می توان نشان داد که:

$$y_1[n] = \begin{cases} \circ & n < -3 \\ -3\left(1/4\right)^{n} + 3(256)\left(1/3\right)^{n} & n \geq -3 \end{cases}$$

نیز کانولوشن را در نظر بگیرید:

$$y_2[n] = \left[(3)^{n} u[-n-1] * \left[\left(1/4\right)^{n} u[n+3]\right]\right]$$

می توان نشان داد که:

$$y_2[n] = \begin{cases} \left((12)^{4/11}\right) 3^{n} & n < -4 \\ \left(1/4\right)^{n} \; 1/11 & n \geq -3 \end{cases}$$

بطور واضح؛ $y_1[n]+y_2[n]=y[n]$ از قسمت قبلی بدست می آید.

(۲,۲,٦) محاسبه زیر

$$y[n]=x_1[n]*x_2[n]*x_3[n]$$

را بـــه ازای $x_1[n]=0/5^n[n]$ ، $x_2[n]=u[n+3]$ ، و $x_2[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$ در نظـــر بگیرید.

الف) $x_1[n]*x_2[n]$ را حساب کنید.

ب) کانولوشن نتیجه بند (الف) با $x_3[n]$ را برای محاسبه $y[n]$ حساب کنید.

ج) $x_2[n]*x_3[n]$ را حساب کنید.

د) کانولوشن نتیجه بند (الف) با $x_1[n]$ را برای $y[n]$ حساب کنید.

حل:

(الف) داریم:

$$\begin{aligned} y_1[n] &= x_1[n]*x_2[n] \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} x_1[x]x_2[n-k] \\ &= \sum_{k=\circ}^{+\infty} (\circ.5)^x u[n+3-k] \end{aligned}$$

که برابر است با

$$y_1[n]=x_1[n]*x_2[n]=\begin{cases} 2\left(1-\left(1/2\right)^{n+4}\right) & n\geq -3 \\ \circ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

(ب) حال:

$$y[n]=x_3[n]*y_1[n]=y_1[n]-y_1[n-1]$$

بنابراین:

$$y[n]=\begin{cases}2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}\right)+2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} & n\geq -2\\ 1 & n=-3\\ \circ & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

بنابراین:

$$y[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}u[n+3]$$

(ج) داریم:

$$\begin{aligned}y_2[n]&=x_2[n]*x_3[n]\\&=u[n+3]-u[n+2]=\delta[n+3]\end{aligned}$$

(د) با استفاده از نتیجه قسمت (ج) داریم:

$$y[n]=y_2[n]*k_1[n]=x_1[n+3]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}u[n+3]$$

۲,۲۷) مساحت زیر سیگنال پیوسته در زمان $v(t)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$A_v=\begin{cases}\infty\\ -\infty^{v(t)dt}\end{cases}$$

نشان دهید که اگر $y(t)=x(t)=x(t)*h(t)$ ، آنگاه

$$A_y=A_xA_h$$

حل:

اثبات در زیر آورده است:

$$\begin{aligned}Ay&=\int_{-\infty}^{+\infty}y(t)dt\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t\tau)d\tau dt\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\int_{-\infty}^{+\infty}h(t-\tau)dtd\tau\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)Ay\,d\tau\\&=AxAy\end{aligned}$$

۲,۲۸) سیگنالهای زیر پاسخ ضربه های سیستمهای LTI گسسته در زمان هستند. آیا این سیستمها پایدار و/ یا علّی هستند؟ دلیل بیاورید.

الف) $h[n]=\left(\frac{1}{5}\right)^{n}u[n]$

هـ) $h[n]=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]+(1/0)^{n}[n-1]$

ب) $h[n]=(0/8)^{n}u[n+2]$

و) $h[n]=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]+(1/01)^{n}u[1-n]$

ج) $h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[-n]$

ز) $h[n]=n\left(\frac{1}{3}\right)^{n}[n-1]$

د) $h[n]=(5)^{n}u[3-n]$

حل:

(الف) کازال است زیرا $h[n]$ برای $n>0$ برابر صفر است.

پایدار است زیرا $\sum_{n=0}^{\infty}\left(1/5\right)^{n}=5/4<\infty$

(ب) کازال نیست زیرا برای $n<0$، $h[n]\neq 0$ پایدار زیرا $\sum(0.8)^{n}=5<\infty$.

(پ) کانتی – کازال زیرا برای $n>0$، $h[n]=0$، پایدار نیست زیرا $\sum_{n=-\infty}^{0}\left(1/2\right)^{n}=\infty$

(ت) کازال نیست زیرا $h[n]\neq 0$ برای $n<0$، پایدار زیرا $\sum_{n=-\infty}^{3}5^{n}=\frac{625}{4}<\infty$

(ت) کازال زیرا برای $n<0$، $h[n]=0$، پایدار نیست زیرا جمله دوم زمانیکه $n\rightarrow\infty$ نامحدود است.

(ح) کازال نیست زیرا برای $n<0$، $h[n]\neq 0$. پایدار است زیرا $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|=\frac{305}{3}<\infty$

(خ) کازال است زیرا برای $n<0$، $h[n]=0$. پایدار است زیرا $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h[n]|=1<\infty$

۲,۲۹) سیگنالهای زیر پاسخ ضربه های سیستمهای LTI پیوسته در زمان هستند. آیا این سیستمها پایدار و / یا علّی هستند؟ دلیل بیاورید.

الف) $h(t)=e^{-4t}u(t-2)$

ب) $h(t)=e^{-6t}u(3-t)$

ج) $h(t)=e^{2t}u(-1-t)$

د) $h(t)=e^{2t}u(-1-t)$

هـ) $h(t)=e^{-6|t|}$

و) $h(t)=te^{-t}u(t)$

ز) $h(t)=\left(2e^{-t}-e^{-(t-100)/100}\right)u(t)$

حل)

(الف) کازال زیرا برای $t<0$ $h(t)=0$، پایدار زیرا $\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt=e^{-8/4}<\infty$

(ب) کازال نیست زیرا برای $t<0$، $h(t)\neq 0$. پایدار نیست زیرا $\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|=\infty$

(پ) کازال نیست زیرا برای $t<0$، $h(t)\neq 0$. پایدار نیست زیرا $\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt=e^{50}<\infty$

ت) کازال نیست زیرا برای $t<0$، $h(t)\neq 0$. پایدار نیست زیرا $\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt=e^{-2/2}<\infty$

(ث) کازال نیست زیرا برای $t<0$، $h(t)\neq 0$. پایدار نیست زیرا $\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt=1/3<\infty$

(ح) کازال است زیرا برای $t<0$، $h(t)=0$. پایدار است زیرا $\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt=1<\infty$

(خ) کازال است زیرا برای $t<0$، $h(t)=0$. پایدار نیست زیرا $\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt=\infty$

۲,۳۰) معادله تفاضلی مرتبه اول زیر را در نظر بگیرید

$$y[n]+2y[n-1]=x[n]$$

با فرض سکون ابتدائی (یعنی اگر در $n<n_0$، $x[n]=0$؛ آنگاه در $n<n_0$، $y[n]=0$) پاسخ ضربه سیستمی را که رابطه ورودی ـ خروجی آن با این معادله تفاضلی توصیف شده است بیابید. شاید بهتر

باشد معادله تفاضلی را به صورتی بازنویسی کنید که $y[n]$ را بر حسب $x[n-1]$ و $x[n]$ بیان کند، و مقادیر $y[\circ], y[1], y[2]$ و ... را به ترتیب بیابید.

حل:

بایستی خروجی سیگنال را وقتی ورودی برابر $x[n]=\delta[n]=\delta[n]$ بیابیم. از آنجایی که از ما خواسته شده است تا فرض کنیم جواب نهایی را مختصر کنیم. می توانیم نتیجه بگیریم که برای $n<\circ$ ، $y[n]=\circ$. حال:

$$y[n]=x[n]-2y[n-1]$$

بنابراین:

$$y[\circ]=x[\circ]-2y[-1]=1$$

,

$$y[1]=x[1]-2y[\circ]=-2$$

,

$$y[2]=x[2]+2y[2]=-4$$

به همین ترتیب: جواب به صورت زیر بدست می آید:

$$y[n]=(-2)^n u[n]$$

این پاسخ ضربه سیستم است.

۲٫۳۱) سیستم LTI ابتدائاض ساکن توصیف شده با معادله تفاضلی زیر را در نظر بگیرید.

$$y[n]+2y[n-1]=x[n]+2x[n-2]$$

پاسخ این سیستم به ورودی نشان داده شده در شکل م ۲-۳۱ را با حل بازگشتی معادله تفاضلی بیابید.

حل:

جواب نهایی مختصر بیان می دارد که برای $n<-2$، $y[n]=\circ$ حال:

$$y[n]=x[n]+2x[n-2]-2y[n-1]$$

بنابراین:

$$y[-2]=1\ ,\ \ y[-1]=\circ\ \ ,\ \ y[\circ]=5\ ,\ ...$$

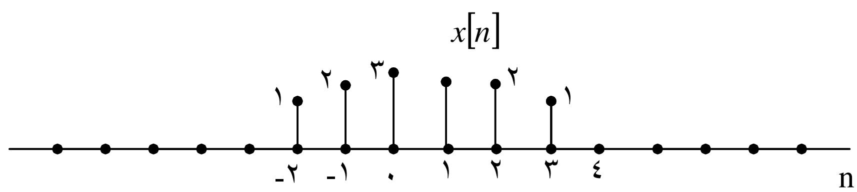
$$y[5]=--110\ ,\ ...y[n]=-110(-2)^{n-5} \qquad n\geq 5 \text{ برای}$$

۲٫۳۲) معادله تفاضلی زیر را در نظر بگیرید.

$$y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=x[n] \qquad \text{(م ۲-۳۲-۱)}$$

فرض کنید که

$$x[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u[n] \qquad \text{(م ۲-۳۲-۲)}$$



شکل م ۲-۳۱

جواب $y[n]$ را مجموع یک جواب خصوصی $y_p[n]$ معادله (م ۲-۳۲-۱) و یک جواب همگن $yh[n]$ به معادله زیر فرض کنید.

$$yh[n]-\frac{1}{2}yh[n-1]=0$$

الف) نشان دهید که جواب همگن عبارت است از

$$yh[n]=A(1)2^{n}$$

ب) جواب خصوصی $y_p[n]$ را به نحوی می یابیم که معادله زیر ارضا شود

$$y_p[n]-\frac{1}{2}y_p[n-1]=\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u[n]$$

فرض کنید $y_p[n]$ در $n\geq 0$ به شکل $B\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$ است و با جایگزینی آن در معادله تفاضلی بالا مقدار B را بیابید.

ج) فرض کنید ورودی یک سیستم LTI توصیف شده با معادله (م ۲-۳۲-۱) و ابتدائاً ساکن، سیگنال معادله (م ۲-۳۲-۲) است. چون در $n<0$، $x[n]=0$؛ پس در $n<0$، $y[n]=0$. همچنین با توجه به بندهای (الف) و (ب) $y[n]$ در $n\geq 0$ به شکل زیرست

$$y[n]=A\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+B\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

برای یافتن ثابت مجهول B باید یک مقدار $y[n]$ در $n \geq \circ$ را بدانیم. با استفاده از شرط سکون ابتدایی و معادلات (م ۲-۳۲-۱) و (م ۲-۳۲-۱) $y[\circ]$ را تعیین کنید. ثابت A را به کمک این مقدار بیابید. نتیجه این محاسبه جواب معادله تفاضلی (م ۲-۳۲-۱) به ازای ورودی معادله (م ۲-۳۲-۳) و شرط سکون ابتدایی است.

حل:

(الف) اگر $y_h[n] = A\left(\frac{1}{2}\right)^n$ دراین صورت لازم است ثابت کنیم

$$A\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{2}A\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \circ$$

واضح است که صحیح می باشد.

(ب) حال برای $n \geq \circ$ می خواهیم:

$$B\left(\frac{1}{3}\right)^3 - \frac{1}{2}B\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

بنابراین $B = -2$

(پ) از معادله (م۲,۳۲,۱) می دانیم که $y[\circ] = x[\circ] + \frac{1}{2}y[-1]y[-1] = x[\circ] = 1$

$$y[\circ] = A + B \quad \Rightarrow \quad A = 1 - B = 3$$

۲,۳۳) سیستمی را در نظر بگیرید که ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ آن معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر را ارضا می کند.

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t) \qquad \text{(م ۲-۳۳-۱)}$$

این سیستم شرط سکون ابتدایی را نیز برآورده می کند.

الف) (i) خروجی $y_1(t)$ سیستم به ازای ورودی $x_1(t) = e^{3t}u(t)$ را بیابید.

(ii) خروجی $y_2(t)$ سیستم به ازای ورودی $x_2(t) = e^{2t}u(t)$ را بیابید.

(iii) خروجی $y_3(t)$ سیستم به ازای ورودی $x_3(t) = ae^{3t}u(t) + \beta e^{2t}u(t)$ را بیابید.

a و β دو عدد حقیقی اند. نشان دهید که $y_3(t) = ay_1 + \beta y_2(t)$.

(iv) حال $x_1(t)$ و $x_2(t)$ را دو سیگنال دلخواه بگیرید، به نحوی که

در $x_1(t) = \circ \ , \ t < t_1$

در $x_2(t) = \circ \ , \ t < t_2$

$y_1(t)$ را پاسخ سیستم به ازای ورودی $x_1(t)$ و $y_2(t)$ را خروجی سیستم به ازای ورودی $x_2(t)$، و $y_3(t)$ را خروجی سیستم به ازای ورودی $x_3(t)$ را خروجی سیستم به ازای ورودی
$x_3(t)=ax_1(t)+\beta x_2(t)$ فرض کنید، نشان دهید که

$$y_3(t)=ay_1(t)+\beta y_2(t)$$

بنابراین سیستم تحت بررسی خطی است.

ب) (i) خروجی $y_1(t)$ را به ازای ورودی $x_2(t)=Ke^{2t}u(t)$ بیابید.

(ii) خروجی $y_2(t)$ را به ازای ورودی $x_1(t)\backslash=Ke^{2(t-T)}u(t-T)$ بیابید. نشان دهید که $y_2(t)=y_1(t-T)$.

(iii) حال $x_1(t)$ را سیگنال دلخواهی بگیرید که در $t<t_{\circ}$، $x_1(t)$. $y_1(t)$ را خروجی سیستم به ازای ورودی $x_1(t)$ و $y_2(t)$ را خروجی سیستم به ازای $x_2(t)=x_1(t-T)$ فرض کنید. نشان دهید که

$$y_2(t)=y_1(t-T)$$

پس نتیجه می گیریم سیستم تحت بررسی تغییرناپذیر با زمان است. با توجه به نتیجه بند (الف) سیستم داده شده LTI است. چون این سیستم شرط سکون ابتدایی را نیز دارد، علّی هم هست.

حل:

(الف) i) از مثال ۲,۱۴) می دانیم که:

$$y_1(t)=\left[\frac{1}{5}e^{3t}-\frac{1}{5}e^{-2t}\right]u(t)$$

(ii) این را بر اساس مثال ۲,۱۴ حل می کنیم. ابتدا فرض کنید که $y_p(t)$ شامل ke^{2t} است.
دراین صورت با استفاده از معادله (م۲,۳۳,۱)، برای $t>\circ$ داریم:

$$2ke^{2t}+2ke^{2t}=e^{2t}\Rightarrow\left(k=\tfrac{1}{4}\right)$$

حال می دانیم که $y_p(t)=\tfrac{1}{4}e^{2t}$ برای $t>\circ$. حال جواب عمومی معادله را بدست می آوریم

$$y_h(t)=Ae^{-2t}$$

بنابراین:

$$y_2(t)=Ae^{-2t}+\tfrac{1}{4}e^{2t}\qquad for\ t>\circ$$

با فرض جواب نهایی، می توانیم نتیجه بگیریم که برای $t\le\circ$ $y_2(t)=\circ$، بنابراین.

$$y_2(\circ] = \circ = A + 1/4 \Rightarrow A = -1/4$$

دراینصورت

$$y_2(t) = \left[-\frac{1}{4}e^{2t}\right] + 1/4\, e^{-2}u(t)$$

iii) فرض کنیم ورودی به صورت $x_3(t) = \propto e^{3t}u(t) + \beta e^{2t}u(t)$ باشد. فرض کنیم که $y_p(t)$ جواب خصوصی بصورت زیر باشد:

$$y_p(t) = x_1\alpha_1 e^{3t} + k_2\beta e^{2t}$$

برای $t > \circ$، با استفاده از معادله (م۲,۳۳) داریم:

$$3k_1\alpha e^{3t} + 2k_2\beta e^{2t} + 2k_1\alpha e^{3t} + 2k_2\beta e^{2t} = \alpha e^{3t} + \beta e^{2t}$$

با متحد قرار دادن ضرایب e^{3t} و e^{2t} در دو طرف معادله داریم:

$$k_1 = 1/5 \ , \ k_2 = 1/4$$

حال، با قرار دادن $y_h(t) = A_e^{-2t}$ داریم:

$$y_3(t) = 1/5\, \alpha e^{3t} + 1/4\, \beta e^{2t} + A e^{-2t}$$

برای $t > \circ$ = شرایط اولیه را به صورت زیر فیض می کنیم:

$$y_3 = (\circ) = \circ = A + \alpha/5 + \beta/4$$

$$\Rightarrow A = -\left(\frac{\propto}{5} + \beta/4\right)$$

بنابراین:

$$y_3(t) = \left\{1/5 \propto e^{3t} + \frac{1}{4}\beta e^{2t} - \left(\frac{\propto}{5} + \frac{\beta}{4}\right)e^{-2t}\right\}u(t)$$

iv) برای ورودی ـ خروجی جفت $x_1(t)$ و $y_1(t)$، می توانیم از معادلـه (م۲,۳۳,۱) اسـتفاده کنـیم و شرایط اولیه برای نوشتن:

(ح۲,۳۳,۱)

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1(t)}{dt} + 2y_1(t) = x_1(t) \\ y_1(t) = \circ \qquad \rightarrow t < t_1 \end{cases}$$

برای ورودی ـ خروجی جفت $x_2(t)$ و $y_2(t)$، می تـوانیم از معادلـه ی (م۱,۲,۳۳) اسـتفاده کنـیم و شرایط اولیه برای نوشتن:

(ح۲,۳۳,۲)

$$\begin{cases}\dfrac{dy_2(t)}{dt}+2y_2(t)=x_2(t)\\ y_2(t)=\circ\end{cases}$$

بااسکیل کردن معادله (ح۲,۳۳,۱) به اندازه α ومعادله (ح۲,۳۳,۲) به اندازه β و خلاصه سازی داریم:

$$\frac{d}{dt}\{\alpha y_1(t)+\beta y_2(t)\}+2\{\alpha y_1 t+\beta y_2(t)\}=\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)$$

$$y_1(t)+y_2(t)=\circ \qquad for \quad t<mm(t_1,t_2)$$

بـا جایگـذاری، واضـح اسـت کـه خروجـی $y_3(t)=\alpha y_1(t)+\beta y_2(t)$ زمانیکـه $x_3(t)=\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)$. بعلاوه $y_3(t)=\circ$ برای $t<t_3$. که t_3 نشان دهنده زمان است تا زمانیکه $x_3(t)=\circ$.

(ب) (i) بااستفاده از نتیجه (a-ii) می توان نوشت:

$$y_1(t)=\frac{k}{4}\left[e^{2t}-e^{-2t}\right]u(t)$$

(ii) این مسئله را در راستای مثال ۲,۱٤ حـل مـی کنـیم. ابتـدا فـرض کنیـد کـه $y_p(t)$ بـه صـورت $KYe^{2(t-T)}$ برای $t>2$ است. سپس بـا اسـتفاده از معادلـه (م۲,۳۳,۱) بـرای $t>T$ اسـت. سـپس بااستفاده از معادله (م۲,۳۳,۱) برای $t>T$ داریم:

$$2ke^{2(t-T)}+22ke^{2(t-T)}=e^{2t}$$

$$\Rightarrow k=\frac{1}{4}$$

می دانیم که $y_p(t)=\frac{k}{4}e^{2(t-T)}$ برای $t>T$. حال جواب عمومی را بدست می آوریم:

$$y_h(t)=Ae^{-2t}$$

بنابراین

$$y_2(t)=Ae^{-2t}+\frac{k}{4}e^{2(t-T)} \qquad for \quad t>T$$