

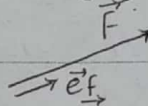
$$|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

دستگاه مختصات مستطینی (دکارتی)

بردار یک مؤلفه‌ای محورهای مختصات $\vec{F}_x = |\vec{F}| \cos \theta$ تصویر بردار $\vec{F}$ بر روی محور x ها

بردار یک مؤلفه‌ای محورهای مختصات $\vec{F}_y = |\vec{F}| \sin \theta$ تصویر بردار $\vec{F}$ بر روی محور y ها

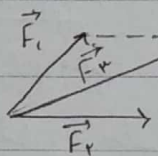
بردار یک: برداری که اندازه آن برابر با واحد (۱) است. بردار یک یک نیروی برداری است هم راستا و هم جهت بردارین و دلی با اندازه واحد:



$$|\vec{e}_F| = 1$$

$$\vec{F} = |\vec{F}| \vec{e}_F$$

$$\vec{e}_F = \frac{\vec{F}}{|\vec{F}|}$$

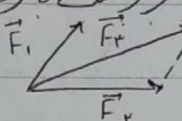


قانون متوازی الاضلاع ۱- از انتهای بردار $\vec{F}_1$ برداری موازی، هم جهت و هم اندازه $\vec{F}_2$ رسم می‌کنیم.

بردار $\vec{F}_3$ و انتهای آن بری با انتهای $\vec{F}_2$ است.

$$\vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

۲- برداری موازی، هم جهت و هم اندازه $\vec{F}_1$ از انتهای $\vec{F}_2$ ترسیم می‌کنیم. بردار $\vec{F}_3$ را از ابتدای $\vec{F}_2$ تا انتهای $\vec{F}_1$ بردار $\vec{F}_3$ است.



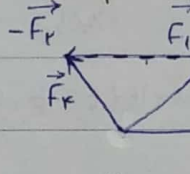
$$|\vec{F}_3| = \sqrt{|\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 + 2|\vec{F}_1||\vec{F}_2|\cos \theta}$$

اندازه بردار $\vec{F}_3$

θ زاویه بین $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ وقتی از یک مبدأ رسم می‌شوند.

$$\vec{F}_4 = \vec{F}_1 - \vec{F}_2$$

$$\vec{F}_4 = \vec{F}_1 + (-\vec{F}_2)$$



بردار تفاضل:

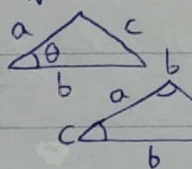
برداری از انتهای بردار اول

به انتهای بردار دوم (برداری که انتهای بردار دوم را به ابتدای بردار اول وصل می‌کند)

به انتهای بردار دوم (برداری که انتهای بردار دوم را به ابتدای بردار اول وصل می‌کند)

$$|\vec{F}_4| = \sqrt{|\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 - 2|\vec{F}_1||\vec{F}_2|\cos(\pi - \theta)}$$

$$= \sqrt{|\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 - 2|\vec{F}_1||\vec{F}_2|\cos \theta}$$



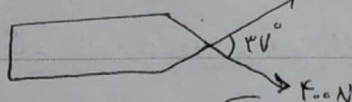
$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}$$

قانون کسینوس ها در مثلث

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

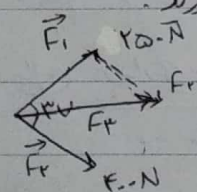
قانون سینوس ها

مثال: اگر برای سه حرکت هم‌اوردن قایق نشان داده شود، در این صورت راستا و



داده شده حداقل نیروی برابر با ۷۰۰ N باشد، در این صورت راستا و

حداقل مقدار بردار نیرویی که باید به قایق وارد نمایم تا حرکت ناایده را به دست آوریم.



$$|\vec{F}_4| = \sqrt{700^2 + 400^2 - 2 \times 700 \times 400 \times \cos 37} = 418.5 \text{ N}$$

برای اینکه نیروی F_4 حداکثر بازده را داشته باشد، باید هم راستا با F_3 باشد.

$$700 - 418.5 = 281.5 \text{ N}$$

$$F_4 = \frac{(700 - |\vec{F}_3|)}{|\vec{F}_3|} \times \vec{F}_3$$

$$\vec{F}_1 = F_{x1} \vec{i} + F_{y1} \vec{j}$$

مثال بردار برانید و فواصل در مختصات مستطی

$$F_{x1} = |\vec{F}_1| \cos \theta, F_{y1} = |\vec{F}_1| \sin \theta$$

θ زاویه بردار $\vec{F}_1$ و محور x ها

$$\vec{F}_2 = F_{x2} \vec{i} + F_{y2} \vec{j}$$

$$F_{x2} = |\vec{F}_2| \cos \beta$$

$$F_{y2} = |\vec{F}_2| \sin \beta$$

β زاویه بردار $\vec{F}_2$ و محور y ها

$$\vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \Rightarrow \vec{F}_3 = (F_{x1} + F_{x2}) \vec{i} + (F_{y1} + F_{y2}) \vec{j}$$

$$\vec{F}_4 = \vec{F}_1 - \vec{F}_2 \Rightarrow \vec{F}_4 = (F_{x1} - F_{x2}) \vec{i} + (F_{y1} - F_{y2}) \vec{j}$$

ضرب داخلی :

ضرب داخلی دو بردار $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ برابر است با مقداری اسکالر (عددی) که این مقدار از رابطه زیر توصیف

$$\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 = |\vec{F}_1| |\vec{F}_2| \cos \theta$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

صی گرد

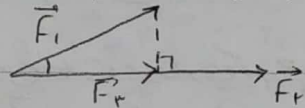
$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1 \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = 0$$

ضرب داخلی دو بردار متعامد $(\theta = \frac{\pi}{2})$ صفر است.

$$\vec{F}_1 = F_{x1} \vec{i} + F_{y1} \vec{j}$$

$$\vec{F}_2 = F_{x2} \vec{i} + F_{y2} \vec{j}$$

$$\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 = F_{x1} F_{x2} + F_{y1} F_{y2}$$



بردار تصویر $\vec{F}_1$ روی $\vec{F}_2$: برابر است با برداری مثل $\vec{F}_2$ که اندازه $F_1 \cos \theta$ داشته باشد.

$$\vec{F}_3 = (\vec{F}_1 \cos \theta) \vec{e}_{F_2}$$

$$F_3 = (\vec{F}_1 \cdot \vec{e}_{F_2}) \vec{e}_{F_2}$$

$$\vec{e}_{F_2} = \frac{\vec{F}_2}{|\vec{F}_2|}$$

$$\vec{F}_3 = \left(\frac{\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2}{|\vec{F}_2|} \right) \frac{\vec{F}_2}{|\vec{F}_2|} = \frac{(\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2)}{|\vec{F}_2|^2} \times \vec{F}_2$$



مثال : بردار $\vec{a} = 3\vec{i} - 7\vec{j}$ را در راستای بردار $\vec{b} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ و بردار متعامد با آن تجزیه کنید.

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

بردار تصویر $\vec{F}_1$ روی $\vec{F}_2$

$$\vec{F}_2 = \frac{(\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2) \vec{F}_2}{|\vec{F}_2|^2} = \frac{(3 \times 4 - 7 \times 3)}{(4^2 + 3^2)} (4\vec{i} + 3\vec{j})$$

$$\Rightarrow \vec{F}_2 = -\frac{4}{25} (4\vec{i} + 3\vec{j}) = -\frac{16}{25} \vec{i} - \frac{12}{25} \vec{j}$$

$$\vec{F}_3 = \vec{F}_1 - \vec{F}_2 \quad ①$$

برای $\vec{F}_3$ داریم

$$\vec{C} \cdot \vec{b} = 0 \quad \vec{C} = 3\vec{i} - 4\vec{j} \quad \text{یا} \quad \vec{C} = -3\vec{i} + 4\vec{j} \quad \text{که متعامد با} \vec{b} \text{ است.} \quad ②$$

دو مؤلفه با جابه جاییه و یکی منفی شده

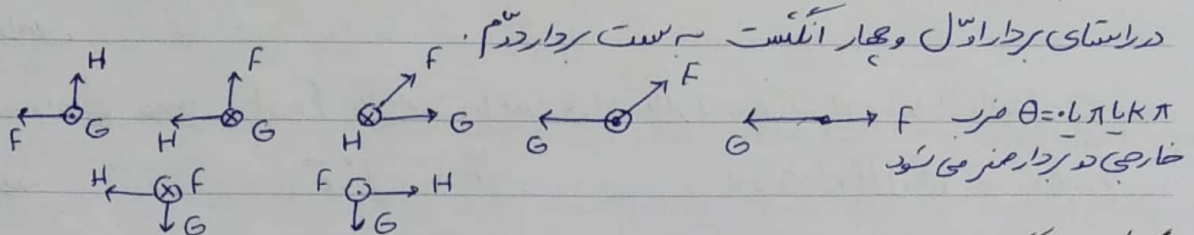
$$\vec{F}_3 = \frac{(\vec{F}_1 \cdot \vec{C})}{|\vec{C}|^2} \vec{C}$$

اصل انتقال نیرو: نیرو می توان در راستای آن جابه جاشد بدون آن که تغییر جهت یا اندازه بدیم
 در این صورت تغییری در تعادل جسم ایجاد نمی گردد.

$$\vec{F} \times \vec{G} = \vec{H}$$

ضرب خارجی دو بردار $\vec{F} \times \vec{G} = \vec{H}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{اندازه } |\vec{F}| |\vec{G}| \sin \theta \\ \text{راستار جهت} \end{array} \right.$

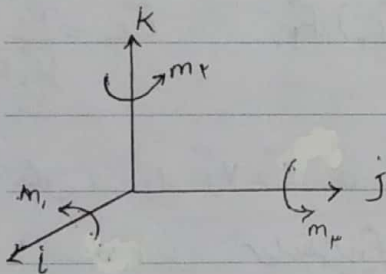
قانون دست راست: بردار ضرب خارجی دو بردار برابر است با جهت شست انگشت دست راست



گشتاور یا لنگر یا ممان (Moment)

نیروی است که به جای اینکه در راستای برداری باشد حول آن بردار است. علامت آن به صورت $\rightarrow$ یا $\leftarrow$ است.

در این حالت برداری که چه بخش حول آن رخ می دهد راستای لنگر است. جهت لنگر جهت شست دست راست است. اگر کف و چهار انگشت دست راست در جهت چرخش لنگر بچرخند
 (واحد لنگر $N \cdot m$ یا $ft \cdot lb$ است)



در این شکل لنگر $\vec{m}$ حول محور z است به علت منفی

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

لنگر در اثر وجود نیرو و بازوی گشتاور ایجاد می شود.

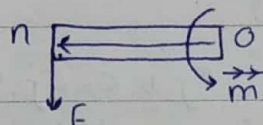


$$M = F \cdot d$$

جهت: برون سو

$$\vec{m} = \vec{r} \times \vec{F}$$

جهت لنگر هواره از r به F



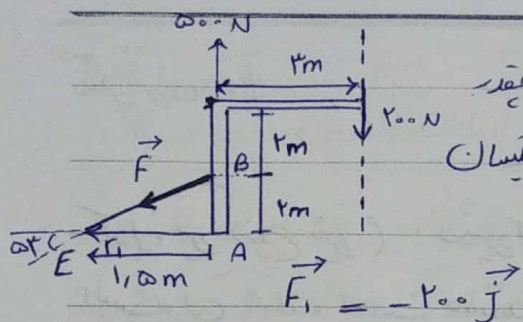
نحوه محاسبه $\vec{F}$ (برای لنگر حول یک نقطه):

$\vec{F}$ بردار بازوی گشتاور برداری است که از نقطه O

(نقطه ای که می خواهیم لنگر را حول آن محاسبه کنیم)

شروع می شود و به نقطه ای در راستای بردار ختم می شود.

$$\vec{m} = \vec{r}_1 \times \vec{F} = \vec{r}_y \times \vec{F} = \vec{r}_x \times \vec{F}$$



مثال در شکل اگر خواهیم تیر چراغ برق بنفشد، نیروی کابل F چقدر باید باشد؟ (می خواهیم لنگر نیروی 200N و 500N حول A یکسان باشد)

روشن اول: ترسیمی ←

لنگر 200N: 1. برداری است که از A شروع می شود به نقطه ای در راستای F مانند می تواند ختم کرد.

$$M_1 = |\vec{F}_1| |\vec{r}_1| \sin \theta_1 = 200 \times 3 \times 1 = 600 \text{ N}$$

نیروی 500N حول A لنگر ندارد چون از خود A عبور می کند

$$M = |\vec{F}| |\vec{r}| \sin \theta = F \times 1.5 \times 0.18 = 1.2 F$$

$$1.2 F = 600 \rightarrow F = \frac{600}{1.2} = 500 \text{ N}$$

برای یاسه F

$$\vec{F}_1 = -200 \vec{j} \quad \vec{F}_2 = 500 \vec{j}$$

$$\vec{r}_1 = 3\vec{i} + 4\vec{j} \quad \vec{r}_2 = 4\vec{j} \quad \vec{r} = -1.5\vec{i}$$

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = (3\vec{i} + 4\vec{j}) \times (-200\vec{j}) = 3 \times (-200) \vec{k} \times (-1.5) \times 0$$

$$\vec{M}_1 = -400 \vec{k} \text{ N.m}$$

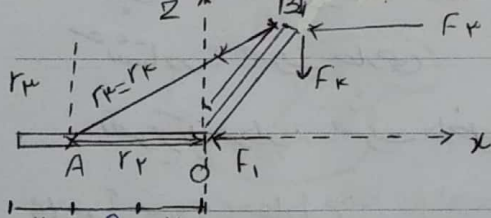
$$\vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = 4\vec{j} \times 500\vec{j} = 0$$

$$\vec{M} = (-1.5\vec{i}) \times F = (-\sin 37^\circ \vec{i} - \cos 37^\circ \vec{j})$$

$$\vec{M} = -1.5 \times 0.6 \times 0 + F(-1.5)(0.18) \vec{k} = 1.2 F \vec{k}$$

$$\vec{M} = -(\vec{M}_1 + \vec{M}_2) \quad 1.2 F \vec{k} = -(400 \vec{k} + 0)$$

$$1.2 F = 400 \text{ N} \quad F = 500 \text{ N}$$



$$F_k = 15 \text{ N} \quad F_y = 10 \text{ N} \quad F_x = 8 \text{ N} \quad F_1 = 5 \text{ N}$$

مثال: اگر نیروها حول نقطه A را به دست آورید.

در این صورت لنگر نیروها حول نقطه A را به دست آورید.

لنگر نیروی $\vec{F}_2$

$$\vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \leftarrow \text{انتهای لقیه ای برداری است با مبدأ A}$$

$$\vec{r}_2 = 2\vec{i} \quad \vec{F}_2 = -8\vec{j} \quad \vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (2\vec{i}) \times (-8\vec{j}) = -16\vec{k}$$

$$\vec{r}_3 = \vec{r}_f = 2\vec{i} + 3\vec{j} \quad \vec{F}_3 = -10\vec{i} \quad \vec{F}_3 \text{ لنگر نیروی}$$

$$\vec{M}_3 = \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 \quad \vec{M}_3 = (2\vec{i} + 3\vec{j}) \times (-10\vec{i}) = 30\vec{k}$$