Subject:

Year: Month: Day: ( )

۱- دو نقطه $(0, 1-\alpha)$, $\left(\frac{|\mu_x-\mu_y|}{\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}}, \beta\right)$ را مشخص کنید.

۲- تعیین اندازه نمونه n ($n_x=n_y=n$) را از منحنی OC بدست آورید.

می توان n_x و n_y را از راه هایی بدست آورد که برای آن ها هزینه هایی در نظر می گیریم.

$$n_x=\left[\frac{\sigma_x^2+\sigma_x\sigma_y\sqrt{\frac{C_y}{C_x}}}{\sigma_x^2+\sigma_y^2}\right]n \quad ,$$

$$n_y=\left[\frac{\sigma_y^2+\sigma_x\sigma_y\sqrt{\frac{C_x}{C_y}}}{\sigma_x^2+\sigma_y^2}\right]n$$

* C_x و C_y هزینه گرفتن از نمونه از X و Y می باشد.

۳- ناحیه پذیرش را تعیین کنید ⟵ دوطرفه $\left[-k_{\frac{\alpha}{2}}, k_{\frac{\alpha}{2}}\right]$ یکطرفه $(-\infty, k_\alpha]$ یا $[-k_\alpha, \infty)$

۴- نمونه های n_x و n_y تایی (n تایی) را گرفته و مقدار آماره را بدست آورید.

ازهمان منحنی های OC تک پارامتری استفاده می کنیم.

$$U=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x}+\frac{\sigma_y^2}{n_y}}}$$

حالت یکطرفه:

$$\mu_x-\mu_y=0 : P\left(\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x}+\frac{\sigma_y^2}{n_y}}} < k_\alpha\right)=1-\alpha$$

$$\mu_x-\mu_y>0 : P\left(\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x}+\frac{\sigma_y^2}{n_y}}} < k_\alpha\right) = P\left(N < k_\alpha - \frac{\mu_x-\mu_y}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_y}+\frac{\sigma_y^2}{n_y}}}\right)=\beta$$

بنرمال استاندارد است

$$\bar{X}-\bar{Y} \sim N\left(\frac{\mu_x-\mu_y}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x}+\frac{\sigma_y^2}{n_y}}}, 1\right)$$

$$-k_\alpha+\frac{\mu_x-\mu_y}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x}+\frac{\sigma_y^2}{n_y}}}=k_\beta$$

$$k_\alpha+k_\beta=\frac{\mu_x-\mu_y}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x}+\frac{\sigma_y^2}{n_y}}}$$

Sahand

Scanned by CamScanner

Subject:
Year: Month: Day: ( )

if $n_x = n_y = n$: $k_\alpha + k_\beta = \dfrac{\sqrt{n}\,(\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}}$

$$\longrightarrow n = \frac{(k_\alpha + k_\beta)^2 (\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}{(\mu_x - \mu_y)^2} = \frac{(k_\alpha + k_\beta)^2}{d^2}$$

در حالت دو طرفه :

$$n \cong \frac{(k_{\frac{\alpha}{2}} + k_\beta)^2}{d^2}$$

مثال : یک سازنده وسایل چوبی به منظور رطوبت زدایی الوار تازه، آن ها را در معرض هوا خشک می کند. هزینه های عملیاتی این روش سنگین است در حالیکه رطوبت زدایی در کوره ها بسیار کم هزینه تر است. این سازنده مایل است آزمایشی انجام دهد تا اگر توجیه پذیر باشد، روش رطوبت زدایی را تغییر دهد، هرچند که این تغییر باعث کم شدن مقاومت برشی چوب شود. او می داند که انحراف معیار مقاومت برشی برای هر دو روش برابر ۲۵ واحد است. با انتخاب $\alpha = 5\%$ او می خواهد اگر با تغییر روش افت مقاومت برشی به حدود ۱۰۰ واحد برسد همچنان از روش اول استفاده کند. مخاطره ی متناظر با تغییر روش نادرست را هم برابر همین مقدار در نظر می گیرد.

الف/ تعیین شیوه ی تصمیم ب/ تعیین اندازه نمونه ج/ اگر براساس نمونه گیری مقادیر ۱۱۷۰ و ۱۱۰۵ واحد برای میانگین های نمونه بدست آید، چه توصیه ای به سازنده می کنید؟

۹۷/۸/۱۹ :

می خواهیم آزمایش کنیم ببینیم روش را از هوا به کوره تغییر دهیم یا خیر؟

$X \rightarrow$ هوا n_x

$Y \rightarrow$ کوره n_y

سوال گیری ست به ۲

$$\begin{cases} H_0 : \mu_x \leq \mu_y \\ H_1 : \mu_x > \mu_y \end{cases}$$

میگوییم خیلی از μ_x کوچکتر باشد کی را هم

همچنان روشم را ادامه دهیم

$$\rightarrow \begin{cases} \mu_x - \mu_y \leq 0 \\ \mu_x - \mu_y > 0 \end{cases} \quad (-\infty, k_\alpha] \rightsquigarrow U = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}}}$$

$$\underline{\text{یا}} \quad \begin{cases} \mu_y - \mu_x \geq 0 \\ \mu_y - \mu_x < 0 \end{cases} \quad [-k_\alpha, \infty) \rightsquigarrow U = \frac{\bar{Y} - \bar{X}}{\sqrt{\frac{\sigma_y^2}{n_y} + \frac{\sigma_x^2}{n_x}}}$$

Sahand

Scanned by CamScanner

Subject:
Year: Month: Day: ( )

$U=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x}+\frac{\sigma_y^2}{n_y}}}$ و $-(\mu_x-\mu_y)$ را ننوشتیم چون با وجود یک طرفه بودن همچنان در فرض صفر تساوی را در نظر می‌گیریم

$H_0: \mu_x \leq \mu_y$

$\boxed{\mu_x=\mu_y}$

ب/ $n=\frac{(k_\alpha, k_\beta)^2}{d^2}=\frac{(k_{0.05}+k_{0.05})^2(45^2)(2)}{(100)^2}\cong 5$

$d=\frac{|\mu_x-\mu_y|}{\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}}=\frac{100}{\sqrt{45^2+45^2}}$ افت مقاومت برشی یعنی اختلاف μها

با سعی و خطا می‌توان از رابطه‌ی $5=\frac{45^2+45^2}{\frac{45^2}{n_x}+\frac{45^2}{n_y}}$

ج/ $U=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n}+\frac{\sigma_y^2}{n}}}=\frac{(1170-1105)\sqrt{5}}{\sqrt{45^2+45^2}}\cong 2.28 \rightarrow$ فرض صفر را رد می‌کنیم

ناحیه‌ی پذیرش $(-\infty, k_\alpha]=(-\infty, 1.645]$

حالت $\begin{cases}\mu_x=\mu_x\\ \mu_x>\mu_y\end{cases}$ یا $\begin{cases}\mu_x=\mu_y\\ \mu_y>\mu_x\end{cases}$ را در نظر بگیرید، فرض صفر آن‌ها را هم باید مثل فرض مقابلش به صورت نامساوی بنویسیم یعنی به صورت $\begin{cases}\mu_x\leq\mu_y\\ \mu_x>\mu_y\end{cases}$ یا $\begin{cases}\mu_x\leq\mu_y\\ \mu_y>\mu_x\end{cases}$

- آزمون برابری میانگین‌های دو توزیع نرمال مستقل اگر انحراف معیارها نامعلوم و مساوی باشند:

$X\sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ $\qquad \sigma_x^2=\sigma_y^2=\sigma^2$

$Y\sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$

$$\begin{cases}H_0: \mu_x=\mu_y & \mu_x\geq\mu_y & \mu_x\leq\mu_y\\ H_1: \mu_x\neq\mu_y & \mu_x<\mu_y & \mu_x>\mu_y\end{cases}$$

Sahand

Scanned by CamScanner

Subject:
Year: Month: Day: ( )

$$U = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}} \sim t_{n_x+n_y-2}$$

به جای σ ها از S استفاده می‌کنیم و در واقع از S_p^2

$$S_p^2 = \frac{(n_x-1)S_x^2 + (n_y-1)S_y^2}{n_x+n_y-2}$$

مراحل آزمون دو طرفه: $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$

$$\frac{|\mu_x-\mu_y|}{\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}} = \frac{|\mu_x-\mu_y|}{\sqrt{2\sigma^2}} \to \sigma\sqrt{2}$$

ولی با 2σ محاسبه می‌شود

۱- تعیین دو نقطه روی منحنی OC $(0, 1-\alpha)$ و $\left(\frac{|\mu_x-\mu_y|}{2\sigma}, \beta\right)$

۲- با فرض $n_x = n_y = n$، مقدار اندازه نمونه از روی منحنی OC تعیین می‌شود.

۳- تعیین ناحیه‌ی پذیرش $A = \left[-t_{\frac{\alpha}{2}, n_x+n_y-2}, t_{\frac{\alpha}{2}, n_x+n_y-2}\right]$

۴- محاسبه مقدار آماره آزمون و مقایسه با ناحیه‌ی پذیرش

۵- اگر $U \in A$ فرض H_0 را پذیرفته و در غیر اینصورت رد می‌کنیم.

مثال: در تحقیقات مربوط به خرج شلیک موشک‌ها که با هدف تقلیل زمان تأخیر بین آغاز جریان شلیک و انفجار صورت می‌گیرد و تصور ادعا بر این است که استفاده از خرج نوع T به جای خرج متداول C می‌تواند تأثیر مثبتی داشته باشد. انحراف معیارهای تقریبی این ۲ روش برابر با ۳٪ ثانیه است. قرار است آزمایش انجام شده و n موشک با هر یک از روش‌ها شلیک شود.

$$\mu_T - \mu_C = -0.06 \Rightarrow \mu_C - \mu_T = 0.06$$

الف/ کاهش ۶٪ ثانیه‌ای در تفاوت میانگین‌ها انجام تغییراتی را در ساخت موشک‌ها توجیه می‌کند. اما مهم است اگر واقعاً هیچ بهبودی حاصل نشود از T استفاده نشود. α را مساوی ۱٪ و β را برای عدم کشف کاهش به میزان ۶٪ ثانیه معادل ۰/۱ در نظر می‌گیریم مقدار n را بیابید.

ب/ اگر $\bar{C} = 0.261$ و $\bar{T} = 0.250$ و $S_C^2 = 0.128$ و $S_T^2 = 0.123$ باشد، آیا T را پیشنهاد می‌کنید؟

Sahand

Scanned by CamScanner

Subject: .....
Year: ..... Month: ..... Day: ..... ( )

$H_0: \mu_T \geq \mu_c$

$H_1: \mu_T < \mu_c$ وقتی بپذیریم که زمان T اختلاف فاحشی با C داشته باشد.

احتمال قبول فرض صفر در حالیکه غلط است ۰/۱

یعنی: $P(\mu_c = \mu_T \mid \mu_T \geq \mu_c) = 0/1$

$$d = \frac{\mu_c - \mu_T}{2\sigma} = \frac{0/06}{2(0/03)} = 1 \quad , \quad \beta = 0/1 \qquad n' \simeq 17$$

$$n' - 1 = n_x + n_y - 2 \xrightarrow{n_x = n_y = n} n' + 1 = 2n \Rightarrow n = \frac{n'+1}{2} \qquad 2n - 2 = 16 \Rightarrow n = \frac{18}{2} = 9$$

آنچه که از نمودار OC می‌خوانیم n' است.

$$2n - 2 = 16 \Rightarrow n = \frac{18}{2} = 9$$

ولی مقدار درجه‌ی آزادی $(n'-1)$ است.

$$S_p^2 = \frac{8(0/0132) + 8(0/0128)}{16} = 0/013$$

$2/583$

$(-\infty, t_{0/01, 16}]$

$$U = \frac{0/261 - 0/250}{\sqrt{0/013}\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9}}} \simeq 0/205$$ فرض صفر را می‌پذیریم

۹۷/۸/۲۱:

- آزمون فرض برابری میانگین های توزیع نرمال مستقل وقتی واریانس ها مجهول و نابرابر باشند:

$$\left.\begin{array}{l} X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2) \\ Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2) \end{array}\right\} \text{مستقل} \qquad \left\{\begin{array}{lll} H_0: & \mu_x = \mu_y & \mu_x \leq \mu_y \\ H_a: & \mu_x \neq \mu_y & \mu_x > \mu_y \end{array}\right. \quad \ldots$$

$$U = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_x^2}{n_x} + \frac{S_y^2}{n_y}}} \overset{?}{\sim} t_{n_x + n_y - 2} \quad \times \text{غلط} \qquad \left[-t_{\frac{\alpha}{2}, \nu}, t_{\frac{\alpha}{2}, \nu}\right]$$

آماره را بررسی کنیم ببینیم آیا توزیع t با $n_x + n_y - 2$ درجه‌ی آزادی دارد یا نه؟

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\frac{(n_x-1)S_x^2}{\sigma_x^2}\chi^2_{n_x-1}}{n_x-1} \cdot \frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\frac{(n_y-1)S_y^2}{\sigma_y^2}\chi^2_{n_y-1}}{n_y-1} \cdot \frac{\sigma_y^2}{n_y}}} \sim t_\nu \qquad \nu = \frac{\left(\frac{S_x^2}{n_x} + \frac{S_y^2}{n_y}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_x^2}{n_x}\right)^2}{n_x+1} + \frac{\left(\frac{S_y^2}{n_y}\right)^2}{n_y+1}} - 2$$

Sahand

Scanned by CamScanner

"در هوای آزادی را معادل دقت در نظر می‌گیریم"

Subject:

Year: Month: Day: ( )

t زوجی: حتماً باید تعداد مشاهدات با کدگیری برابر باشد.

حالت کلی:

X	Y	D
x_1	y_1	$x_1 - y_1 = d_1$
x_2	y_2	$x_2 - y_2 = d_2$
⋮	⋮	⋮
x_n	y_n	$x_n - y_n = d_n$
$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{d}$

ابتدا $2n$ نمونه می‌گیریم (n نمونه از X و n نمونه از Y) براساس نمونه‌های بدست آمده مقادیر مربوط به متغیر تصادفی تفاضلی را به صورت $D = X - Y$ تعریف می‌کنیم:

$$D \sim N(\mu_D = \mu_x - \mu_y \, , \, \frac{\sigma_D^2}{n})$$

$$\begin{cases} H_0: \mu_D = 0 \\ H_a: \mu_D \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{(آماره آزمون)} \quad U = \frac{\bar{D} - 0}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

ناحیه پذیرش در این حالت می‌شود:

در واقع $A = [-t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \, , \, t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}]$

"در حالتی که σ ها برای ما شناخته نمی‌شود از t زوجی کمک گرفت"

$$\begin{cases} H_0: \mu_x = \mu_y \\ H_a: \mu_x \neq \mu_y \end{cases}$$

مثال: قالب جدیدی برای تهیه بتن ساخته شده است که با آن بتن سریعتر شکل می‌گیرد و هرچند که تصور می‌شود مقاومت کامل بار بتن حاصله کمتر شود نتایج نمونه‌گیری از این روش در شکل زیر ارائه شده است:

شماره نمونه	مقاومت کامل بار: قالب قدیمی	قالب جدید	D_i
۱	۴۶۸۰	۴۰۲۰	۶۶۰
۲	۴۶۵۰	۳۹۴۰	۷۱۰
۳	۴۵۳۰	۳۹۸۰	۵۵۰

الف/ به ازای α برابر ۵٪ آیا می‌توان پذیرفت که تصور درخصوص کاهش مقاومت کامل بار صحیح است؟

ب/ اگر σ_D تقریباً برابر ۹۰ باشد به منظور کسب کاهش به اندازه ۲۰۰ واحد با احتمال ۹۰٪ به چند مشاهده نیاز داریم؟

اگر دلیل و ملاکی در صورت سؤال برای سهل یا سخت‌گیری نبود، سخت‌گیری می‌کنیم.

Sahand

Scanned by CamScanner