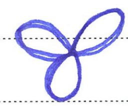
(تمرین) $r = \cos 3\theta$ ، $r = \sin 3\theta$



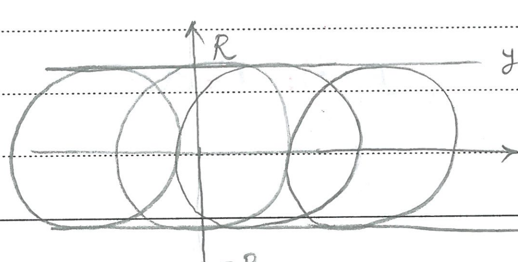
رز سه برگ

**تعریف:** منحنی پوش دسته منحنی های یک پارامتری به صورت $F(x, y, c) = 0$ (پارامتر) عبارت است از منحنی که بر هر یک از منحنی های حاصل از دسته منحنی ها مماس باشد.

برای یافتن معادله‌ی منحنی پوش کافیست از طرفین معادله‌ی دسته منحنی ها نسبت به پارامتر $c$ مشتق گرفته و سپس بین رابطه‌ی حاصل از مشتق و معادله‌ی دسته منحنی ها پارامتر $c$ را حذف کنید و اگر امکان حذف پارامتر $c$ وجود نداشته باشد رابطه‌ی حاصل از مشتق و معادله‌ی دسته منحنی ها توأمان معادلات پارامتری منحنی پوش خواهند بود.

مثال) منحنی پوش دسته دوایر یک پارامتری به شکل $(x-c)^2 + y^2 = R^2$ را بیابید. ($R$ مقدار ثابت و $c$ پارامتر)

$O'(c, 0)$ $R$




$y = R$ منحنی پوش

$y = -R$ منحنی پوش

$$(x-c)^2 + y^2 = R^2 \xrightarrow{\text{مشتق}} 2(-1)(x-c) + 0 = 0$$

$$\begin{cases} x - c = 0 \\ (x-c)^2 + y^2 = R^2 \end{cases} \xrightarrow{\text{حذف}} 0 + y^2 = R^2 \rightarrow \boxed{y = \pm R}$$ منحنی های پوش



Kimia Stationery Collection

SUBJECT:

DATE:

مثال) معادله‌ی منحنی پوش دسته خطوط یک پارامتری به صورت $x\cos\theta + y\sin\theta = k$ را بیابید. ($k$ مقدار ثابت و $\theta$ پارامتر)

معادله‌ی دسته خطوط یک پارامتری

$$\begin{cases} -x\sin\theta + y\cos\theta = 0 & \cos\theta \\ x\cos\theta + y\sin\theta = k & \sin\theta \end{cases} +$$

$$y\cos^2\theta + y\sin^2\theta = k\sin\theta \longrightarrow \boxed{y = k\sin\theta} \longrightarrow \boxed{x = k\cos\theta}$$

حذف $\theta$ $\Rightarrow x^2 + y^2 = \dots = k^2 \longrightarrow \boxed{x^2+y^2=k^2}$ دایره منحنی پوش

تمرین) $y = cx + \sqrt{a^2 + b^2c^2}$ ($a$ و $b$ مقادیر ثابت و $c$ متغیر)

تمرین) $y = cx + f(c)$

$c$ پارامتر

مثال) ثابت کنید اگر $f(x)$ در $x=a$ مشتق پذیر باشد:

$$\lim_{x\to a} \frac{x f(a) - a f(x)}{x-a} = a - a f'(a)$$

فرمول: $f'(a) = \lim_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$ یا $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a}$

فرض: $x - a = \Delta x \longrightarrow x = a + \Delta x$

$$\lim_{x\to a} \frac{x f(a) - a f(x)}{x-a} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(a+\Delta x) f(a) - a f(a+\Delta x)}{\Delta x}$$

A ۱۳

SUBJECT:

DATE: / /

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x f(a) - a[f(a+\Delta x) - f(a)]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[ f(a) - a \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} \right] =$$

$$= f(a) - a f'(a)$$

مثال) اگر $g(x)$ در $x=a$ مشتق پذیر باشد نشان دهید تابع زیر در $x=a$ پیوسته است.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x) - g(a)}{x-a} & \text{اگر } x \neq a \\ g'(a) & \text{اگر } x = a \end{cases}$$

$f(a) = g'(a)$ (تعریف شده)

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'(a) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a) \Rightarrow$$ $a$ در $f$ پیوسته است

مثال) نمودار تابع زیر را رسم نموده و پیوستگی آن را در نقاط مختلف بررسی کنید.

تمرین

$$f(x) = \begin{cases} |x - [x]| & \text{اگر } [x] \text{ زوج باشد ،} \\ |x - [x+1]| & \text{اگر } [x] \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

SUBJECT:

DATE:

تمرین) اگر $a$ یک مقدار ثابت باشد و $f(x)=(x-a)[x]$ باشد نشان دهید:

$$f'_{+}(a) - f'_{-}(a) = 1$$

دنباله: هر تابع از $\mathbb{N}$ به $\mathbb{R}$ دنباله نامیده می‌شود.

(دنباله) $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

مجموعه اعداد طبیعی: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

مجموعه اعداد حقیقی: $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

$$f(1) = u_1 \longrightarrow (1, u_1)$$

$$f(2) = u_2 \longrightarrow (2, u_2)$$

$$f(3) = u_3 \longrightarrow (3, u_3)$$

$$\vdots$$

$$f(n) = u_n \longrightarrow (n, u_n)$$

$$\vdots$$

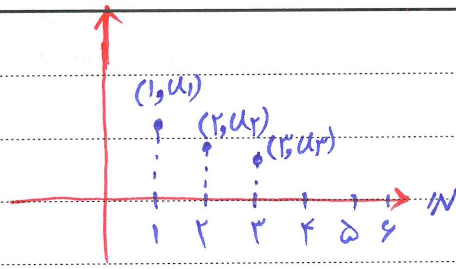
اگر $u_n$ برحسب $n$ معلوم باشد آنگاه:

جملات دنباله: $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$

نقاط دنباله: $(1, u_1), (2, u_2), \dots, (n, u_n), \dots$

SUBJECT:

DATE: / /




نمودار دنباله به صورت نقطه‌ای

قرارداد $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ (دنباله $u_n$)

یا

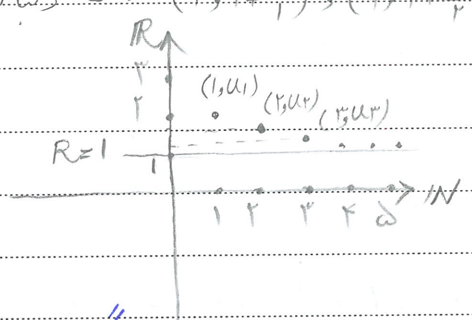
به طور خلاصه $\{u_n\}$

مثال) نمودار دنباله $\{u_n\}$ با جمله عمومی (جمله nام) زیر را مشخص کنید:

$$u_n = 1 + \frac{1}{n}$$

جملات دنباله: $u_1 = 1+\frac{1}{1}$ و $u_2 = 1+\frac{1}{2}$ و $u_3 = 1+\frac{1}{3}$ و ...

نقاط دنباله: $(1, 1+\frac{1}{1})$ و $(2, 1+\frac{1}{2})$ و $(3, 1+\frac{1}{3})$ و ...




تعریف: $l$ را حد دنباله‌ی $\{u_n\}$، وقتی $n \to \infty$ می‌نامیم هرگاه:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists P \in \mathbb{N} : \forall n > P \Rightarrow |u_n - l| < \epsilon$$

بقدر کافی کوچک

مرتبه طبیعی

Kimia Stationery Collection

SUBJECT:

DATE:

مثال) با استفاده از تعریف حد دنباله نشان دهید حد دنباله‌ی $u_n$ با جمله‌ی عمومی $u_n = \frac{2n+1}{n}$ برابر است با ۲ .

$\lim_{n\to\infty} u_n = 2$

هدف : $p$ برحسب $\varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} : \forall n > p \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$

$|u_n - l| = \left|\frac{2n+1}{n} - 2\right| = \left|\frac{2n-2n+1}{n}\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \boxed{n > \frac{1}{\varepsilon}}$

$\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] \qquad \frac{1}{\varepsilon} \qquad \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$

$p = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$

قضیه : حد دنباله در صورت وجود منحصر به فرد است .

(برهان خلف) $\lim_{n\to\infty} u_n = l_1$ و $\lim_{n\to\infty} u_n = l_2$

~~حکم : $l_1 = l_2$~~

فرض : $l_1 \neq l_2$

از مرتبه $p_1$ به بعد

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists p_1 \in \mathbb{N} : \forall n > p_1 \Rightarrow |u_n - l_1| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists p_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n > p_2 \Rightarrow |u_n - l_2| < \varepsilon$

از مرتبه $p_2$ به بعد

با انتخاب $P=\max\{P_1,P_2\}$ داریم:

از مرتبه P به بعد

$$\begin{cases}|u_n-l_1|<\varepsilon\\ |u_n-l_2|<\varepsilon\end{cases}$$

از مرتبه P به بعد

$$|l_1-l_2|=|(l_1-u_n)+(u_n-l_2)|\le|l_1-u_n|+|u_n-l_2|$$

$$=|u_n-l_1|+|u_n-l_2|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon \Rightarrow |l_1-l_2|<2\varepsilon\ ,\ \forall\varepsilon>0$$

به ازای $\varepsilon=\frac{|l_1-l_2|}{2}>0 \Rightarrow |l_1-l_2|<\frac{2|l_1-l_2|}{2}=|l_1-l_2|$

$|l_1-l_2|<|l_1-l_2| \Rightarrow$ تناقض $\Rightarrow$ فرض خلف باطل $\Rightarrow l_1=l_2$

نتیجه: در حل مسائل اگر به دنباله‌ای برخورد کنیم که دارای دو یا سه و یا ... حد متمایز باشد آنگاه نتیجه می‌گیریم که دنباله دارای حد نیست زیرا حد دنباله باید منحصر به فرد باشد.

تعریف: دنباله $\{u_n\}$ را همگرا (متقارب) گوییم هرگاه $\lim_{n\to\infty}u_n$ موجود و متناهی باشد. در غیر این صورت دنباله واگرا (متباعد) نامیده می‌شود.

قضایای حد دنباله‌ها: اگر $\lim_{n\to\infty}u_n$ و $\lim_{n\to\infty}v_n$ موجود و متناهی باشد

Kimia Stationery Collection

SUBJECT:

DATE:

آگاه :

۱) $\lim\limits_{n\to\infty}(U_n \pm V_n) = \lim\limits_{n\to\infty} U_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} V_n$

۲) $\lim\limits_{n\to\infty}(C U_n) = C \lim\limits_{n\to\infty} U_n$ (C مقدار ثابت)

۳) $\lim\limits_{n\to\infty}(U_n \cdot V_n) = \lim\limits_{n\to\infty} U_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} V_n$

۴) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{U_n}{V_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} U_n}{\lim\limits_{n\to\infty} V_n}$ (شرط برانکه $\lim\limits_{n\to\infty} V_n \neq 0$)

مثال) حد دنبالهی $\{U_n\}$ با جملهی عمومی $U_n = \dfrac{2n^2+n-1}{n^2+4}$ را بیابید.

روش اول: $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+n-1}{n^2+4} = \dfrac{\infty}{\infty}$ مبهم $\xrightarrow{H} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n+1}{2n} = \dfrac{\infty}{\infty}$ مبهم

$\xrightarrow{H} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4}{2} = \boxed{2}$

روش دوم: $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+n-1}{n^2+4} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cancel{n^2}(2+\cancel{\frac{1}{n}}-\cancel{\frac{1}{n^2}})}{\cancel{n^2}(1+\cancel{\frac{4}{n^2}})} = \boxed{2}$

SUBJECT:

DATE: / /

مثال) حد دنباله‌ی $\{u_n\}$ با جمله‌ی عمومی

$$u_n = \frac{\frac{1}{1\times 2\times 3} + \frac{1}{2\times 3\times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}}{n^2 - n + 1}$$

را بدست آورده و همگرایی دنباله را بدست آورید.

$\lim_{n\to\infty} u_n = ?$ (هدف)

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} \equiv \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}$$

$$1 \equiv A(n+1)(n+2) + Bn(n+2) + Cn(n+1)$$

برای یافتن $A$ و $B$ و $C$ : روش اول :

ریشه‌های حقیقی
$$\begin{cases} n = 0 \rightarrow 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2} \\ n = -1 \rightarrow 1 = -B \Rightarrow B = -1 \\ n = -2 \rightarrow 1 = 2C \Rightarrow C = \frac{1}{2} \end{cases}$$

روش دوم :

$$1 \equiv An^2 + 3An + 2A + Bn^2 + 2Bn + Cn^2 + Cn$$

$$1 \equiv (A+B+C)n^2 + (3A+2B+C)n + 2A$$

$$\begin{cases} A+B+C = 0 \\ 3A+2B+C = 0 \\ 2A = 1 \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{2}} \end{cases} \Rightarrow \boxed{B = -1} \,,\ \boxed{C = \frac{1}{2}}$$

Kimia Stationery Collection