

سؤال 15 - حاصل $e^{\frac{1}{2}\pi i}$ کدام است -

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$$

سؤال 16 - اگر $z = a(\cos n + i\sin n)$ و $z = 1 - i$ کدام است -

$$a(\cos n + i\sin n) = 1 - i = \sqrt{2} \left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} \right) = re^{i\theta}$$

$$\frac{7\pi}{4} \quad \frac{5\pi}{4} \quad \frac{3\pi}{4} \quad \frac{\pi}{4}$$

سؤال 17 - حاصل عبارت $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} \right)^{10}$ کدام است -

$$2 \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

صورت و مخرج دارای r برابر هستند

$c = r$ و $\theta = \frac{\pi}{3}$

سؤال 18 - اگر $z = \frac{1-i}{1+i}$ حاصل $z e^{\frac{i\pi}{2}}$ کدام است -

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i \quad i \cdot z = \frac{i+1}{1+i}$$

1

2 $-1+i$

3 $1-i$

4 1

سؤال 19 - اگر a و b ریشه های معادله $z^2 - 2z + 4$ باشد، نگاه معیار $a^n + b^n + ab$ کدام است -

$$\text{جواب: } 2^{n+1} \cos\frac{n\pi}{3} + 4$$

ct:

Year. Month. Date. ()

$$1 \pm \sqrt{1-4} \Rightarrow a = 1 + i\sqrt{3}, \quad b = 1 - i\sqrt{3}$$

$$r = 2$$

$$r = 2$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\theta = -\frac{\pi}{3}$$

$$a^n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{3}} = 2^n \left(\cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3} \right)$$

$$b^n = 2^n e^{-i\frac{n\pi}{3}} = 2^n \left(\cos \frac{n\pi}{3} - i \sin \frac{n\pi}{3} \right)$$

$$2^n \left(\cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3} \right) + 2^n \left(\cos \frac{n\pi}{3} - i \sin \frac{n\pi}{3} \right) + 4 \left(\cos 0 + i \sin 0 \right)$$

$$= 2^{n+1} \cos \frac{n\pi}{3} + 4$$

ریشه‌های n ام یک عدد مختلط

برای گرفتن ریشه n ام یک عدد مختلط باید از دستگاه مختصات قطبی استفاده نمود

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

ریشه n ام z عدد مختلطی است مانند z_0 که اگر به توان n برسد بسوی خود برود

$$z = z_0 \quad z_0 \Rightarrow r_0, \theta_0$$

$$r(\cos \theta + i \sin \theta) = r_0^n (\cos n\theta_0 + i \sin n\theta_0)$$

$$r_0 = \sqrt[n]{r}$$

$$n\theta_0 = 2k\pi + \theta \Rightarrow \theta_0 = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, k=0, 1, 2, \dots, n-1$$

جواب به ازای $n=3$ با جواب با $n=3$ برابر است

مثال 20 - ریشه های 3 عدد مختلط $z = -1 - i$ را تعیین کنید

$$r = \sqrt{2} \quad r_0 = \sqrt[6]{2}$$

$$\theta_0 = \frac{5\pi/4 + 2k\pi}{3} = \frac{5\pi + 8k\pi}{12} \quad k=0, 1, 2$$

$$z_1 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right) \quad k=0$$

$$z_2 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{13\pi}{12} + i \sin \frac{13\pi}{12} \right) \quad k=1$$

$$z_3 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{21\pi}{12} + i \sin \frac{21\pi}{12} \right) \quad k=2$$



مثال 21 - کدام عدد مختلط یکی از ریشه های 4 در $8i$ است

$$\theta = \frac{17}{2} \quad r = 8$$

$$r_0 = 8^{1/4} \quad \theta_0 = \frac{17}{8} + \frac{1}{2} k\pi \quad k=(0, 1, 2, 3)$$

- $\frac{17\pi}{8}$ - 1 ✓
- $\frac{13\pi}{8}$ - 2 ✓
- $\frac{9\pi}{8}$ - 3 ✓
- $\frac{5\pi}{8}$ - 4 ✓



مثال 22 - کدام عدد مختلط یکی از ریشه های $1 - i$ است

$$\theta = \frac{7\pi}{2}, r = 1$$

$$\theta_0 = \frac{\frac{7\pi}{2} + 2k\pi}{3} \quad k=0 \Rightarrow 1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right)$$

- $\frac{1}{2}(-i + \sqrt{3})$ - 1 ✓
- $\frac{1}{2}(-i + \sqrt{3})$ - 2 ✓
- $\frac{1}{2}(i + \sqrt{3})$ - 3 ✓
- $\frac{1}{2}(i + \sqrt{3})$ - 4 ✓

23: یکی از ریشه های چهارم $z = 9 - i$ کدام است -

$r = 9$ $\theta = -\frac{\pi}{2}$

$r = \sqrt{3}$ $\theta = \frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4} = -\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}k\pi$ $0, 1, 2, 3$

- $\frac{5\pi}{8}$ - 1
- $\frac{9\pi}{8}$ - 2
- $\frac{11\pi}{8}$ - 3 ✓
- $\frac{13\pi}{8}$ - 4

24: یکی از ریشه های $z = \frac{1+i}{1+i+(1-i)^2}$ به کدام صورت است -

$z = \frac{1+i}{1+i-2i} = \frac{1+i}{1-i}$ $\Rightarrow r=1$ $\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ 1

$z = \frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{2i}{2} = i$ $\theta = \frac{\pi}{2}$

- $\frac{\pi}{3}$ - 1
- $\frac{\pi}{2}$ - 2 ✓
- $\frac{6\pi}{3}$ - 3
- $\frac{4\pi}{3}$ - 4

$\theta_0 = \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}$

حد و پیوستگی:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{0} = \pm \infty$$

صورت و مخرج $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \Rightarrow x > a$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \Rightarrow x < a$$

در پیوستگی مقدار تابع باید با حد برابر باشد (محدود و راست هم باید با هم برابر باشند)

مثال 25: حد در $x^2 - 2$

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & x < -2 \\ 0 & x = -2 \\ 11 - x^2 & x > -2 \end{cases}$$

حد تابع برابر 7 است ولی تابع پیوسته نیست

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} (3x^2) = 7 \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} (11 - x^2) = 7 \neq 0 = f(-2)$$

مثال 26: مقادیر a و b را تعیین کنید بطوریکه تابع در نقاط 3 و -3 حد داشته باشد

$$f(x) = \begin{cases} 2x - a & x < -3 \\ ax + 2b - 3 & -3 \leq x \leq 3 \\ b - 5x & x > 3 \end{cases}$$

$$-3 - a = -3a + 2b \quad 3a + 2b = b - 15 \quad a = -3$$

$$b = -6$$

ct:

Year. Month. Date. ()

سوال 27:

$$\lim_{n \rightarrow -1^+} \frac{|x|}{+ [n]} = \lim_{n \rightarrow -1^+} \frac{|x|}{-1} = \lim_{n \rightarrow -1^+} \frac{-x}{-1} = \lim_{n \rightarrow -1^+} x = -1$$

$x \rightarrow -1 \Rightarrow x > -1 \Rightarrow -1 < x < 0$

قبل از نزدیک شدن به -1 جزو صغیر برابر -1 می شود

سوال 28:

$$f(x) = \frac{1}{2^{2y} + 1}$$

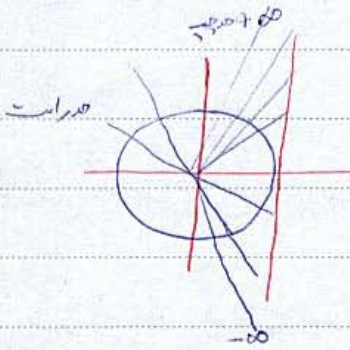
$$x \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

1- راست = 0 حد چپ

2- ∞ و راست = 0

3- ∞ و ∞ = 1

4- ∞ و راست = 1 حد چپ



$$\text{حد راست} = \frac{1}{2^{+\infty} + 1} = \frac{1}{\infty + 1} = 0 \quad \text{حد چپ (بزرگ)} = \frac{1}{2^{-\infty} + 1} = \frac{1}{0 + 1} = 1$$

سوال 29:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2^{1/x}}{3 + 2^{1/x}}$$

$$x \rightarrow 0^+ \quad y = 2^{1/x} \Rightarrow y \rightarrow +\infty \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1+y}{3+y} = \frac{1}{3}$$

$$x \rightarrow 0^- \rightarrow y \rightarrow 0 \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1+y}{3+y} = \frac{1}{3}$$

- 3/3 1
- 1/3 2
- 1 3

4 ✓ حد ندارد

شکر درجه وقتی درجه به سمت بی نهایت برود می شود درجه بزرگ صورت به درجه بزرگ معارج