☒ پس آزمون نسبت در سری همیشه آزمون ریشه (کوشی) اولویت دارد. زیرا آزمون ریشه، آزمون قوی‌تری از آزمون نسبت است.

نکته: زمانی از آزمون ریشه استفاده می‌کنیم که عبارت‌هایی مانند فاکتوریل و یا توانی داشته باشیم

(مثلاً : $(na)!$ ، n^n ، ...)

☒ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{P(n)} = 1$ & $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln(P(n))} = 1$

$P(n)$: چندجمله‌ای

☒ $\sqrt[n]{(na)!} \sim \left(\frac{na}{e}\right)^a$: در بینهایت

آزمون مقایسه و هم ارزی:

در این دو آزمون سعی می‌کنیم سری داده شده را با سری $\sum \frac{1}{n^p}$ مقایسه کنیم.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \xrightarrow[\text{برای}]{p>0} \frac{1}{n^p} : \text{مثبت، نزولی، پیوسته} \xrightarrow{\text{هم رفتار}} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} \longrightarrow 0<p<1$$

⚠ نکته: اگر ابتدا با چند آزمون همگرایی یا واگرایی را نتیجه گرفت به ترتیب از آزمون‌های هم ارزی، مقایسه، ریشه استفاده می‌کنیم و انتگرال

مثال

$$\text{8-1)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \boxed{\frac{-n^2+3}{n^3+n\sqrt{n}+1}}^{\,a_n}$$

$$a_n \sim \frac{-n^2}{n^3} = -\frac{1}{n} \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1/n) \xrightarrow{\text{آزمون انتگرال}} \text{واگرا است}$$

$$\text{8-2)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+4^n}{3^n+5^n} \longrightarrow \text{همگرا است}$$

$$a_n \sim \frac{4^n}{5^n} = \left(\frac{4}{5}\right)^n \xrightarrow{\text{سری هندسی}} \text{همگرا است}$$

(آزمون ریشه) $L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n+4^n}{3^n+5^n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{4^n}{5^n}} = \frac{4}{5}<1 \longrightarrow$ همگرا است

روش دوم سوال ۸-۲

۸-۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!\,6^n}{(3n)!}$

$L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n)!\,6^n}{(3n)!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(2n)!}\cdot\sqrt[n]{6^n}}{\sqrt[n]{(3n)!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{2n}{e})^2\times 6}{(\frac{3n}{e})^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{K}{n}=0$

$\longrightarrow L<1 \longrightarrow$ همگرا است

آزمون نسبت (روش ۲) $L=\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=?$

آزمون مقایسه (روش ۳) $\longrightarrow$ [redacted]

۸-۴) $\sum_{2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^\alpha}$ اولاً برای $\alpha<0$ شرط لازم همگرایی برقرار نیست پس برای $\alpha<0$ سری واگرا است.

می دانیم برای هر $\alpha>0$ "$n>(\ln n)^\alpha$" نامساوی برقرار است در نتیجه $\frac{1}{(\ln n)^\alpha}>\frac{1}{n}$ و چون $\frac{1}{n}$ واگرا است پس $\frac{1}{(\ln n)^\alpha}$ نیز واگرا است.

مثال (۸-۵) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^P}$

$\ln(n)<n \longrightarrow \frac{\ln(n)}{n^P}<\frac{n}{n^P}=\frac{1}{n^{P-1}} \Rightarrow \begin{cases} P-1>1 \longrightarrow P>2 & \text{همگرا است} \\ P<0 \longrightarrow & \text{واگرا است} \end{cases}$

ثابت می کنیم سری فوق برای $P>1$ همگرا است پس $a=\frac{P-1}{2}$ را قرار می دهیم در این صورت $a>0$

$\ln(n)<n^a \longrightarrow \frac{\ln(n)}{n^P}<\boxed{\frac{1}{n^{P-a}}} \longrightarrow$ همگرا است چون $P-a=P-\frac{P-1}{2}=\frac{P+1}{2}>1$

نکته: در اکثر مواقعی که در سوال $\ln$ داریم از مقایسه n و $\ln n$ استفاده می کنیم

$\ln(n)>1 \longrightarrow \frac{\ln(n)}{n^P}>\frac{1}{n^P} \longrightarrow P<1$ واگرا است