۳) عامل درجه دوم(غیر قابل تجزیه) غیر تکراری مانند x^2+3 یا بطور کلی ax^2+bx+c

در این حالت به ازای هر یک از این عاملها یک کسر به صورت $\frac{Ax+b}{ax^2+bx+c}$ در سمت راست تساوی قرار می دهیم به عنوان مثال:

$$\frac{1}{x(1+x^2)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+c}{1+x^2}$$

$$\frac{1}{x^2(x^2+x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{(x^2+x+1)}$$

۴) عامل درجه دوم تکراری مانند $(x^2+1)^3$ یا بطور کلی $(ax^2+bx+c)^n$

در این حالت به ازای هر عامل $\left(ax^2+bx+c\right)^n$ تعداد n کسر به صورت زیر در سمت راست تساوی قرار می دهیم:

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

به عنوان مثال:

$$\frac{x+5}{x(x^2+1)^3}=\frac{C}{x}+\frac{A_1x+B_1}{x^2+1}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+1)^2}+\frac{A_3x+B_3}{(x^2+1)^3}$$

تذکر یک: منظور از عامل درجه دوم عاملی است که قابل تجزیه به عوامل درجه اول نباشد به عنوان مثال عبارت $x^2+3x-10$ عبارت درجه دوم محسوب نمی شود چون می توان آن را به صورت حاصلضرب دو عامل درجه اول به صورت زیر نوشت (مثلا با استفاده از اتحاد جمله مشترک)

$$x^2+3x-10=(x+5)(x-2)$$

تذکر دو: عباراتی به شکل $x^2+\mathrm{a}^2$ (مثل x^2+9) تجزیه پزیر نیستند و عامل درجه دوم محسوب میشن اما عباراتی به شکل $x^2-\mathrm{a}^2$ با استفاده از اتحاد مزدوج تجزیه می شن.

به طور کلی داریم:

$$ax^2+bx+c=0 \;\Rightarrow\; \Delta \geq 0$$ قابل تجزیه

$$ax^2+bx+c=0 \;\Rightarrow\; \Delta < 0$$ غیر قابل تجزیه

مرحله سوم: مخرج مشترک گیری و بدست آوردن ثابتها

بعد از اینکه کسر اصلی را به صورت جمع چندین کسر نوشتیم در مرحله بعد بین کسرهای سمت راست تساوی مخرج مشترک می گیریم و صورت کسر حاصل را برابر صورت کسر اصلی قرار می دهیم.

به مثال زیر دقت کنید:

$$\frac{3x-1}{x^2-1}=\frac{3x-1}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$\Rightarrow\; 3x-1=A(x+1)+B(x-1)$$

اکنون در دو طرف تساوی بالا عددی دلخواه(معمولا ریشه های مخرج) را به ازای x قرار می دهیم تا ثابت های A,B بدست آیند.

$$x=1 \quad \Rightarrow \quad 3(1)-1=A(1+1)+B(1-1) \quad \Rightarrow \quad A=1$$

$$x=-1 \quad \Rightarrow \quad 3(-1)-1=(1)(-1+1)+B(-1-1) \quad \Rightarrow \quad B=2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3x-1}{x^2-1}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}$$

خلاصه مراحل تجزیه کسر:

مرحله اول: تقسیم صورت بر مخرج(در صورت نیاز) و ساده سازی کسر

مرحله دوم: تفکیک کسر و نوشتن آن به صورت مجموع چند کسر ساده

مرحله سوم: مخرج مشترک گیری و بدست آوردن ثابت ها

مثال:کسر $\frac{1}{x(1+x^2)}$ را تجزیه کنید

$$\frac{1}{x(1+x^2)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+c}{1+x^2}=\frac{A(1+x^2)+x(Bx+c)}{x(1+x^2)}$$

$$\Rightarrow\ 1=\ A(1+x^2)+x(Bx+c)$$

دقت کنید در تساوی بالا سه مجهول داریم بنابراین باید سه عدد دلخواه به x بدهیم تا مجهولات مشخص شوند یکی از این اعداد می تواند ریشه x یعنی صفر باشد اما عامل دیگر یعنی $(1+x^2)$ ریشه حقیقی ندارد بنابراین دو عدد دلخواه مثلا ۱ و ۱- را به جای x قرار می دهیم.

$$x=0 \quad \Rightarrow \quad 1=A(1+0)+(0)(B(0)+c) \ \Rightarrow \ A=1$$

$$x=1 \quad \Rightarrow 1=(1)(2)+(1)(B+c) \quad \Rightarrow \quad B+c=-1$$

$$x=-1 \quad \Rightarrow 1=(1)(2)+(-1)(-B+c) \quad \Rightarrow \quad B-c=-1$$

$$\Rightarrow \ \begin{cases} B+c=-1 \\ B-c=-1 \end{cases} \quad \Rightarrow \ B=-1\,,\quad C=0$$

$$\Rightarrow \ \frac{1}{x(1+x^2)}=\frac{1}{x}+\frac{-x}{1+x^2}=\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}$$

یک روش دیگر برای بدست آوردن مجهولات به این صورت است که پس از مساوی قرار دادن صورت کسرها طرفین رابطه را بر حسب توانهای x مرتب می کنیم:

$$\Rightarrow\ 1 = A(1+x^2) + x(Bx+c)$$

$$\Rightarrow\ \ 1 = A + Ax^2 + Bx^2 + cx = (A+B)x^2 + cx + A$$

اکنون برای بدست آوردن ثابتها، ضرایب توانهای مشابه x در دو طرف رابطه را مساوی هم قرار می دهیم یعنی:

ضریب x در طرف راست معادله = ضریب x در طرف چپ معادله

ضریب x^2 در طرف راست معادله = ضریبx^2 در طرف چپ معادله

عدد ثابت در طرف راست معادله = عدد ثابت در طرف چپ معادله

آقا اجازه: طرف چپ تساوی که x^2 و x نداره؟

استاد: چرا داره شما نمی بینی!!!! در واقع سمت چپ تساوی رو می تونیم به صورت زیر بنویسیم:

$$0x^2 + 0x + 1 = (A+B)x^2 + cx + A$$

یعنی هر موقع توانی از x وجود نداره ضریب اون صفر بوده بنابراین

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A=1\ ,B=-1\ ,C=0$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} + \frac{-x}{1+x^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$$

مثال: کسر $\frac{x-2}{x^2(1+x)}$ را تجزیه کنید

$$\frac{x-2}{x^2(1+x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{1+x}$$

دقت کنید x^2 یک عامل درجه اول تکراری محسوب میشه

در ادامه به جای مفرج مشترک گیری بهتره که طرفین رابطه بالا را در مفرج عبارت سمت چپ یعنی $x^2(1+x)$ ضرب کنیم

$$\Rightarrow \quad x-2 = Ax(1+x) + B(1+x) + Cx^2 = (A+C)x^2 + (A+B)x + B$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} A+C=0 \\ A+B=1 \\ B=-2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A=3 \ , B=-2 \ , C=-3$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x-2}{x^2(1+x)} = \frac{3}{x} + \frac{-2}{x^2} + \frac{-3}{1+x} = \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{3}{1+x}$$

مثال: کسر $\frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}$ را تجزیه کنید

در اینجا چون درجه صورت بزرگتر از مفرج هست بنابراین می بایست صورت را بر مفرج تقسیم کنیم (با استفاده از تقسیم چندجمله ایها) دقت کنید که جواب رو باید به صورت زیر بنویسیم:

$$\frac{\text{صورت}}{\text{مخرج}} = \text{خارج قسمت} + \frac{\text{باقی مانده}}{\text{مخرج}}$$

$$\frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x} = x+1 + \frac{-(x+2)}{x^3-x^2-2x} = x+1 - \frac{x+2}{x^3-x^2-2x}$$

در ادامه کار باید کسر $\frac{x+2}{x^3-x^2-2x}$ رو تفکیک کنیم دقت کنید چون مفرج کسر درجه سوم هست باید ابتدا آن را به حاصل ضرب عوامل درجه اول و دوم تجزیه کنیم:

$$\Rightarrow \quad x^3-x^2-2x = x(x^2-x-2) = x(x-2)(x+1)$$

$$\frac{x+2}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}$$

$$\Rightarrow \quad x+2 = A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2)$$

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 = A(-2)(1) + B(-1)(0) + C(0)(-2) \qquad \Rightarrow \quad A = -1$$

$$x = -1 \quad \Rightarrow \quad 1 = A(-3)(0) + B(-1)(0) + C(-1)(-3) \quad \Rightarrow C = \frac{1}{3}$$

$$x = 2 \quad \Rightarrow \quad 4 = A(0)(3) + B(2)(3) + C(2)(0) \quad \Rightarrow \quad B = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x+2}{x(x-2)(x+1)} = \frac{-1}{x} + \frac{\frac{2}{3}}{x-2} + \frac{\frac{1}{3}}{x+1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^4 - 3x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} = x + 1 - \frac{x+2}{x^3 - x^2 - 2x}$$

$$= x + 1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{x-2}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

انتگرال گیری از کسرهای گویا

همانطور که در ابتدای فصل گفتیم بیشترین دردسر انتگرال گیری از کسرهای گویا مربوط به تجزیه کسر میشه و بعد از اینکه کسر رو تجزیه کردید کار خاصی باقی نمی مونه اما با این حال یکسری از ریزه کاریها رو باید حواستون باشه! که در اینجا به صورت خلاصه براتون توضیح می دم:

گفتیم که بعد از تجزیه کسر مخرج آن به چهار شکل در می آید که برای هر حالت به صورت زیر عمل می کنیم:

۱ - اگر مخرج کسر عامل درجه اول غیر تکراری باشد

در این حالت جواب انتگرال به صورت **لگاریتمی طبیعی** در می آید و به صورت کلی داریم:

$$\int \frac{C}{ax+b}dx = C\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{C}{a}Ln|ax+b|$$

مثال: (ما این مثال رو از انتگرال های تعمیم یافته حل می کنیم البته میشه از روش تغییر متغیر هم استفاده کرد)

$$\int \frac{5}{2x-3}dx = 5\int \frac{1}{2x-3}dx = 5\left(\frac{1}{2}\right)\int \frac{2}{2x-3}dx = \frac{5}{2}Ln|2x-3| + c$$

۲-اگر مخرج کسر عامل درجه اول تکراری باشد

در این حالت از روش تغییر متغیر استفاده می کنیم (داخل پرانتز را u می گیریم) و جواب به صورت کسری در می آید

مثال:

$$\int \frac{dx}{(2x-7)^3} \quad \Rightarrow u = 2x-7 \quad \Rightarrow du = 2dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dx}{(2x-7)^3} = \int \frac{\frac{du}{2}}{u^3} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^3} = \frac{1}{2}\left(\frac{u^{-2}}{-2}\right) = \frac{-1}{4u^2} + c$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{(2\mathrm{x}-7)^3} = \frac{-1}{4(2x-7)^2} + c$$

۳-اگر مخرج کسر عامل درجه دوم غیر تکراری باشد

در این حالت برای سادگی ابتدا فرض می کنیم مخرج کسر به صورت مربع کامل($x^2 + a^2$) باشد (در غیر اینصورت باید مخرج را به شکل مربع کامل در آوریم که در ادامه به توضیح آن می پردازیم)

شکل کلی انتگرال در این حالت به صورت است:

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + a^2} dx$$

برای حل انتگرال بالا آن را به صورت زیر به دو قسمت تفکیک می کنیم:

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + a^2} dx = \int \frac{Ax}{x^2 + a^2} dx + \int \frac{B}{x^2 + a^2} dx$$

که جواب انتگرال اول به صورت لگاریتم طبیعی و جواب انتگرال دوم به صورت آرک تانژانت است یعنی داریم:

$$\int \frac{Ax}{x^2 + a^2} dx = A\left(\frac{1}{2}\right) \int \frac{2x}{x^2 + a^2} dx = \frac{A}{2} Ln|x^2 + a^2| + c$$

$$\int \frac{B}{x^2 + a^2} dx = B \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{B}{a} Arctg\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

تذکر:فرمول زیر رو حتما حفظ کنید:

$$\int \frac{1}{u^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} Arctg\left(\frac{u}{a}\right) + c$$