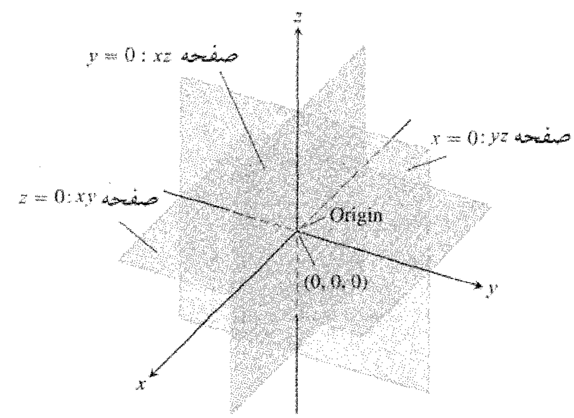
آنها را تعریف می کنند بر یکدیگر عمودند. نقاط روی محور x مختصات y و z برابر با صفر دارند. یعنی این نقاط مختصاتی به شکل $(x,0,0)$ دارند. به همین ترتیب نقاط روی محور y مختصاتی به شکل $(0,y,0)$ و نقاط روی محور z مختصاتی به شکل $(0,0,z)$ دارند.

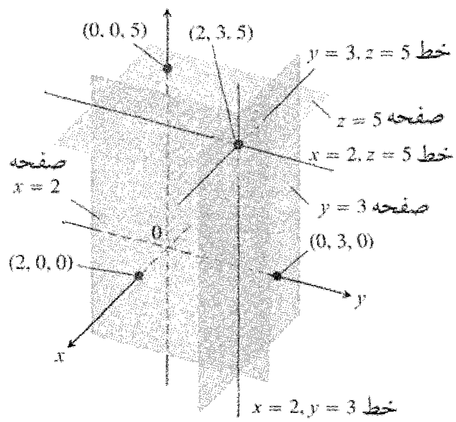
صفحاتی که با محورهای مختصات معین می شوند عبارتند از **صفحه** xy، که معادله متعارف(استاندارد) آن $z=0$ است، **صفحه** yz که معادله متعارف آن $x=0$ است؛ و **صفحه** xz که معادله متعارف آن $y=0$ است. این صفحات در مبداء $(0,0,0)$ یکدیگر را قطع می کنند(شکل**۱۲-۲**). مبداء مختصات با عدد 0 و گاهی با حرف انگلیسی O نیز مشخص می شود.



شکل ۱۲-۲: صفحات $x=0$، $y=0$ و $z=0$ فضا را به هشت قسمت تقسیم می کنند.

سه **صفحه مختصات** $x=0$، $y=0$ و $z=0$ فضا را به هشت قسمت تقسیم می کنند که هر قسمت **یک- هشتم** نام دارد. یک- هشتمی که در آن مختصات نقاط همگی مثبت اند **یک - هشتم اول** نامیده می شود؛ برای نامگذاری یا شماره گذاری هفت یک- هشتم دیگر هیچ قراردادی وجود ندارد.

نقاط واقع در یک صفحه عمود بر محور x همگی مختص x یکسان دارند و این مختص همان عددی است که در آن صفحه محور x را قطع می کند. مختصات y و z این نقاط هر عددی می توانند باشند. به همین ترتیب نقاط واقع در یک صفحه عمود بر محور y مختص y مشترک و نقاط واقع در یک صفحه عمود بر محور z مختص z مشترک دارند. برای نوشتن معادلات این صفحات کافیست آنها را با مقدار مختص مشترکشان نامگذاری کنیم. صفحه $x=2$ صفحه عمود بر محور x در $x=2$ است. صفحه $y=3$ صفحه عمود بر محور y در $y=3$ است. صفحه $z=5$ صفحه عمود بر محور z در $z=5$ است. شکل **۱۲-۳** صفحات $x=2$، $y=3$ و $z=5$ را به همراه نقطه تلاقی آنها یعنی (۲ , ۳ , ۵) نشان می دهد.



شکل۱۲-۳: صفحات $x=2$، $y=3$ و $z=5$ سه خط گذرنده از نقطه (۲ , ۳ , ۵) را مشخص می کنند.

صفحات $x=2$ و $y=3$ در شکل **۱۲-۳** یکدیگر را در خطی موازی با محور z قطع می کنند. این خط با جفت معادلات $x=2$ و $y=3$ توصیف می شود. نقطه ای چون (x,y,z) روی این خط قرار دارد اگر و تنها اگر $x=2$ و $y=3$ باشد. به همین ترتیب، خط تقاطع صفحات $y=3$ و $z=5$ با جفت معادلات $y=3$ و $z=5$ توصیف می شود. این خط موازی با محور x است. خط تقاطع صفحات $x=2$ و $z=5$، که موازی محور y است با جفت معادلات $x=2$ و $z=5$ توصیف می شود.

در مثال های زیر چند معادله و نامعادله مختصاتی را همراه با مجموعه نقاطی که در فضا تعریف می کنند ارائه کرده ایم.

مثال ۱: این معادلات را به صورت هندسی تعبیر می کنیم.

(الف)- $z \ge 0$: نیمی از فضا که شامل نقاط روی صفحه xy و بالای آن است.

(ب) - $x=-3$: صفحه عمود بر محور x در $x=-3$. این صفحه موازی با صفحه yz قرار دارد و **۳** واحد پشت سر آن

ست.

(پ)- $z=0$ ، $X \le 0$ و $y \ge 0$: ربع دوم صفحه xy.

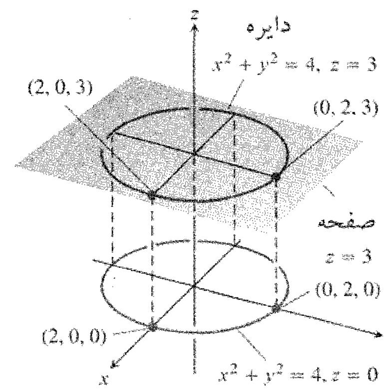
(ت)- $x \ge 0$ ، $y \ge 0$ و $z \ge 0$: یک هشتم اول

(ث)- $-1 \le y \le 1$: تیغه ای (بره ای) بین صفحات $y=-1$ و $y=1$ (شامل خود صفحات).

(ج)- $z=2, y=-2$: فصل مشترک صفحات $y=-2$ و $z=2$. به بیان دیگر، خطی که از نقطه $(0,-2,2)$ می گذرد و با محور x موازی است.

مثال ۲ : نقاط $P(x,y,z)$ که در معادلات زیر صدق می کنند کدامند

$$x^2+y^2=4 \ , \ z=3$$



شکل۱۲-۴: دایره $x^2+y^2=4$ در صفحه $z=3$ (مثال ۲).

حل: این نقاط در صفحه افقی $z=3$ قرار دارند و در این صفحه دایره $x^2+y^2=4$ را تشکیل می دهند. این مجموعه نقاط را "دایره $x^2+y^2=4$ در صفحه $z=3$" یا بصورت ساده تر " دایره $x^2+y^2=4$، $z=3$" می نامیم (شکل۱۲-۴).

فاصله و کره ها در فضا

فرمول فاصله بین دو نقطه در صفحه xy را می توان به نقاط فضا تعمیم داد.

فاصله بین نقاط $P_1(x_1,y_1,z_1)$ و $P_2(x_2,y_2,z_2)$ عبارت است از

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

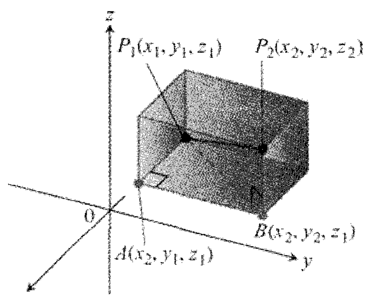
اثبات: جعبه ای مستطیلی می سازیم که وجوه آن موازی با صفحات مختصات بوده و نقاط P_1 و P_2 در گوشه های مقابل به هم جعبه قرار داشته باشند (شکل **۱۲-۵**). اگر $A(x_2,y_1,z_1)$ و $B(x_2,y_2,z_1)$ رئوس جعبه نشان داده شده در شکل باشند آنگاه طول های سه یال P_1A، AB و BP_2 جعبه عبارتند از

$$|P_1A|=|x_2-x_1|, \quad |AB|=|y_2-y_1|, \quad |BP_2|=|z_2-z_1|$$

چون مثلث های P_1BP_2 و P_1AB هر دو قائم الزاویه اند با دو بار کاربرد قضیه فیثاغورث بدست می آوریم:

$$|P_1P_2|^2=|P_1B|^2+|BP_2|^2 \quad , \quad |P_1B|^2=|P_1A|^2+|AB|^2$$

(شکل **۱۲-۵** را ببینید).



شکل۱۲-۵: فاصله بین نقاط P_1 و P_2 را با کاربرد قضیه فیثاغورث برای مثلث های قائم الزاویه P_1AB و P_1BP_2 بدست می آوریم.

بنابراین

$$\begin{aligned}|P_1P_2|^2&=|P_1B|^2+|BP_2|^2\\&=|P_1A|^2+|AB|^2+|BP_2|^2\\&=|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2+|z_2-z_1|^2\\&=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2\end{aligned}$$

و درنتیجه

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

مثال۳: فاصله بین نقاط $P_1(2,1,5)$ و $P_2(-2,3,0)$ عبارت است از:

$$\begin{aligned}|P_1P_2|&=\sqrt{(-2-2)^2+(3-1)^2+(0-5)^2}\\&=\sqrt{16+4+25}\\&=\sqrt{45}\approx 6.708\end{aligned}$$

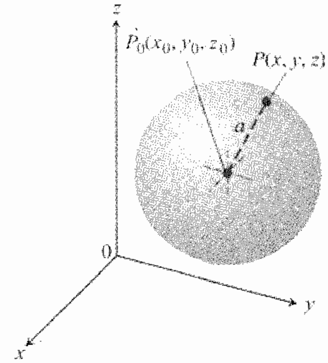
می توانیم با استفاده از فرمول فاصله معادلات کره های واقع در فضا را بنویسیم (شکل **۱۲-۶**). نقطه ای چون $P(x,y,z)$ روی کره ای به شعاع a و به مرکز $P_0(x_0,y_0,z_0)$ واقع است

دقیقاً وقتی که $|P_0P|=a$ باشد یا

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=a^2$$

معادله متعارف کره ای به شعاع a و به مرکز (x_0,y_0,z_0):

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=a^2$$



شکل۱۲-۶: کره ای به شعاع a که مرکز آن در نقطه (x_0,y_0,z_0) واقع است.

مثال ۴: مرکز و شعاع کره ای با معادله زیر را بیابید:

$$x^2+y^2+z^2+3x-4z+1=0$$

حل: مرکز و شعاع یک کره را به همان شیوه ای که مرکز و شعاع یک دایره را بدست آوردیم بدست می آوریم: مربعات روی جملات x، y و z را کامل می کنیم و هر عبارت درجه دو را به صورت مربع یک عبارت خطی می نویسیم. سپس از این معادله که شکل متعارف دارد مرکز و شعاع کره را استنباط می کنیم. برای کره موجود داریم

$$x^2+y^2+z^2+3x-4z+1=0$$

$$\left(x^2+3x\right)+y^2+\left(z^2-4z\right)=-1$$

$$\left(x^2+3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)+y^2$$

$$+\left(z^2-4z+\left(\frac{-4}{2}\right)^2\right)=-1+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{-4}{2}\right)^2$$

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2+(z-2)^2=-1+\frac{9}{4}+4=\frac{21}{4}$$

از این شکل متعارف نتیجه می گیریم که $x_0=-3/2$، $y_0=0$، $z_0=2$ و $a=\sqrt{21}/2$. مرکز کره نقطه $(-3/2,0,2)$ و شعاع آن $\sqrt{21}/2$ است.

مثال ۵: در اینجا برخی تعابیر هندسی معادلات و نامعادلات مرتبط با معادله کره را ارائه می کنیم.

(الف)- $x^2+y^2+z^2<4$: درون کره $x^2+y^2+z^2=4$

(ب)- $x^2+y^2+z^2\le 4$: گوی توپری که به کره

$$x^2+y^2+z^2=4$$

محدود است. یعنی کره $x^2+y^2+z^2=4$ به همراه درون آن.

(پ)- $x^2+y^2+z^2<4$: خارج کره $x^2+y^2+z^2=4$

(ت)- $x^2+y^2+z^2=4, z\le 0$: نیمکره پایینی کره

$$x^2+y^2+z^2=4$$

که صفحه xy(صفحه $z=0$) آن را از کره جدا کرده است.

درست همانطور که مختصات قطبی روش دیگری برای مشخص کردن مکان نقاط در صفحه xy است (بخش۱۱-۳)، دستگاههای مختصات دیگری، متفاوت از دستگاه مختصات دکارتی که در اینجا معرفی کردیم، برای فضای سه بعدی وجود دارند. دو نمونه از این دستگاههای مختصات را در بخش۱۵-۷ بررسی می کنیم.

تمرین های ۱۲-۱

توصیف هندسی معادلات

در تمرین های۱ -۱۶ توصیف هندسی مجموعه نقاط فضا را که مختصات آنها در جفت معادلات داده شده صدق می کنند بیان کنید:

۱- $x=2,\ y=3$

۲- $x=-1,\ z=0$

۳- $y=0,\ z=0$

۴- $x=1,\ y=0$

۵- $x^2+y^2=4,\ z=0$

۶- $x^2+y^2=4,\ z=-2$

۷- $x^2+z^2=4,\ y=0$

۸- $y^2+z^2=1,\ x=0$