Subject . Year. Month. Day.

خواص بسط فوریه

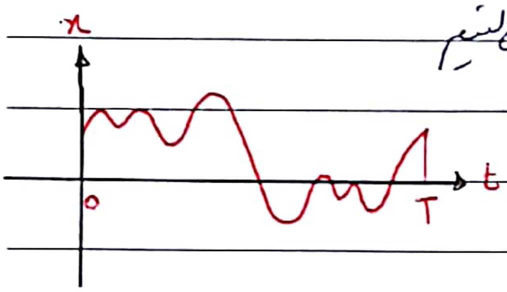
۱- در توابع زوج فقط جملات کسینوسی ظاهر می‌شود

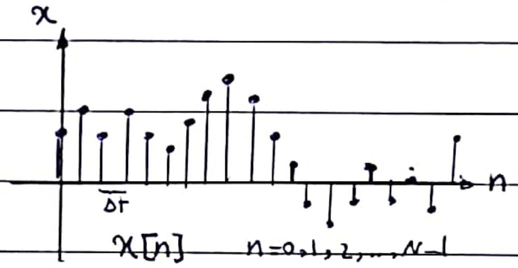
2- در توابع فرد فقط جملات سینوسی ظاهر می‌شود.

3- جمله‌ی ثابت برابر با متوسط تابع است

بسط فوریه‌ی گسسته (DFT)

برای توابعی که تجربی بدست آمده‌اند به طوری که نمی‌توان بسط فوریه را حساب کرد. برای این کار تابع را گسسته سازی می‌کنیم





فاصله‌ی بین دو نمونه را Δt فرض می‌کنیم و اگر N نقطه‌ی کل نمونه‌ها داشته باشیم $T=N\Delta t$

و برای این نمونه برداری فرکانس نمونه برداری تعریف می‌کنیم $f_s=\frac{1}{\Delta t}\left(\frac{Sample}{s}\right)$

در این صورت بسط فوریه‌ی تابع از فرم پیوسته به حالت گسسته در آمده و به جای انتگرال از سیگما استفاده می‌کنیم.

$$a_0=\frac{2}{N}\sum_{i=0}^{N-1}x[i] \qquad a_n=\frac{2}{N}\sum_{r=0}^{N-1}x[r]\cos\left(\frac{2n\pi}{T}r\Delta t\right)$$

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

$$b_n=\frac{2}{N}\sum_{r=0}^{N-1}x[r]\sin\left(\frac{2n\pi}{T}r\Delta t\right)$$

در بسط فوریه‌ی گسسته فرض می‌شود که $x(n+N)=x(n)$

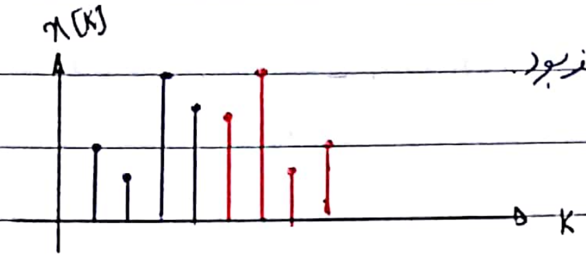
$x[n]\xRightarrow{DFT}X[k]$

$X[k]\xRightarrow{inv\ DFT}x[n]$

$\text{if } x(n+N)=x(n) \Rightarrow X(k+N)=X(k)$

بنابراین DFT نیز متناوب خواهد بود.

در $X[k]$ ضرایب از وسط برگردان آینه‌ای خواهند بود.

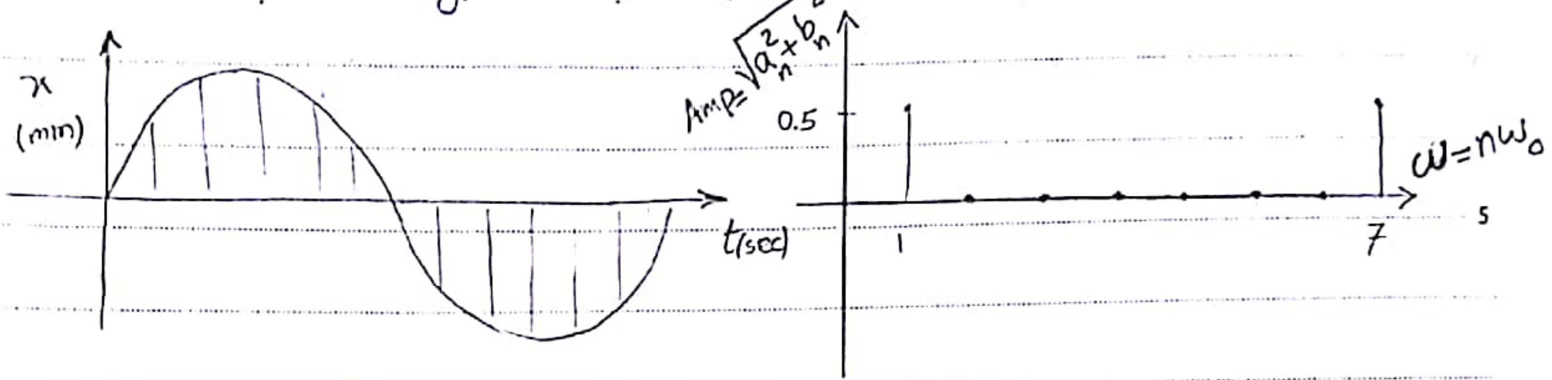


تبدیل فوریه سریع (FFT): در این روش تعداد نقاط را $N=2^m$ می‌گیریم و تعداد عملیات

ما $N.\log N$ خواهد بود.

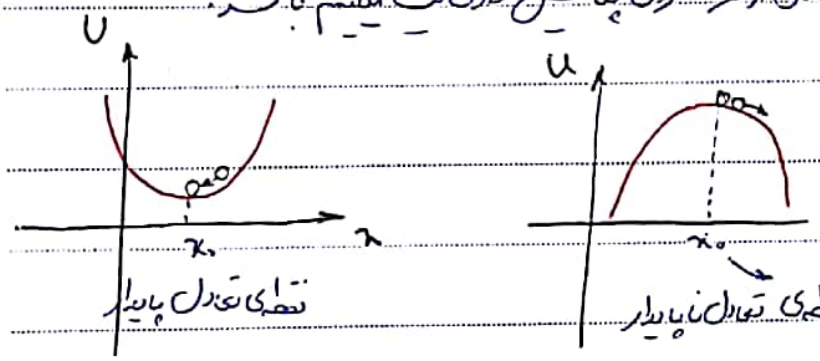
تبدیل فوریه سریع Fast F.T (F.F.T)

برای $N=2^m$ نقطه محاسبه می‌شود و تعداد محاسبات با $N\log N$ متناسب است.



ارتعاشات حول نقطه‌ی تعادل دینامیکی سیستم اتفاق می‌افتد.

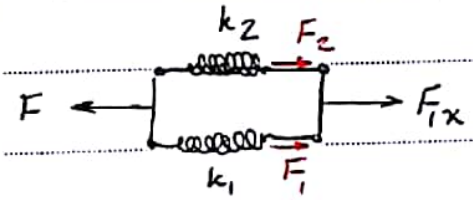
شرط پایدار بودن حرکت این است که نقطه‌ی تعادل از نظر انرژی پتانسیل دارای یک مینیمم باشد.



نیرو مشتق انرژی پتانسیل است پس در نقطه‌ی تعادل باید انرژی مینیمم داشته باشد یعنی تغییرات نیرو صفر باشد.

$$F=-\frac{du}{dx} \qquad u=\frac{1}{2}kx^2 \qquad F=-kx$$

تابع انرژی پتانسیل معمولاً مربوط به تغییر شکل الاستیک مواد (فنر)، گرانش و ... می‌باشد.



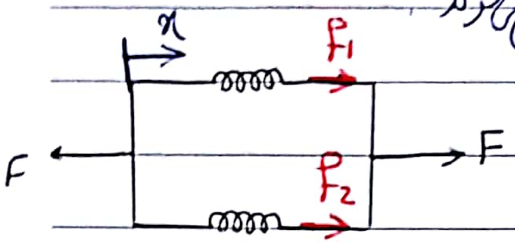
فنرهای موازی: فنرهایی که جابجایی مساوی دارند و نیروها باهم جمع می‌شوند.

$$F_1=-k_1x,\quad F_2=-k_2x \longrightarrow F_1+F_2=-(k_1+k_2)x$$

$$F=F_1+F_2=-k_{eq}x \quad , \quad k_{eq}=k_1+k_2$$

$$F=-k_{eq}x$$

فنرهای موازی: فنرهایی با جابه‌جایی یکسان و نیروها باهم جمع می‌شوند

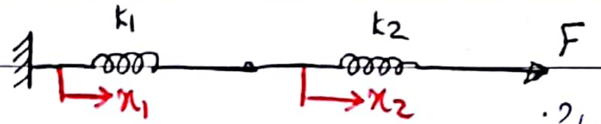


$F_1=-K_1x$

$F_2=-K_2x$

$F=Kqx$

$$F=F_1+F_2 \Rightarrow -K_{eq}x=-K_1x-K_2x \Rightarrow K_{eq}=K_1+K_2$$



فنرهای سری:

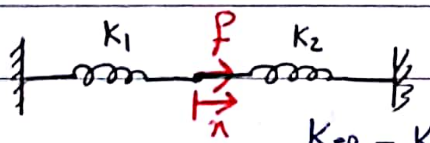
فنرهایی که نیروی مساوی دارند و جابه‌جایی‌ها باهم جمع می‌شوند

$$F=-K_{eq}x_{eq} \rightarrow x_{eq}=\frac{-F}{K_{eq}}$$

$$\Rightarrow x_{eq}=x_1+x_2$$

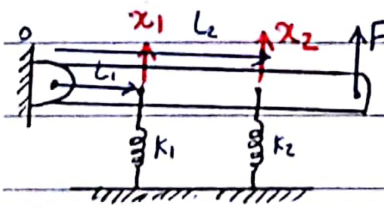
$$F=-K_1x_1 \rightarrow x_1=\frac{F}{-K_1} \qquad F=-K_2x_2 \rightarrow x_2=\frac{-F}{K_2} \qquad \rightarrow \frac{-F}{K_{eq}}=\frac{-F}{K_1}+\frac{-F}{K_2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{K_{eq}}=\frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2}$$



مثال: چون جابه‌جایی‌ها برابر است پس فنرها موازی‌اند

$$K_{eq}=K_1+K_2$$



$$\Sigma M_o=(-K_1x_1L_1)+(-K_2x_2L_2)+FL=0$$

$$F=K_1x_1\frac{L_1}{L}+K_2x_2\frac{L_2}{L}$$ θ زاویه چرخش $x_1=L_1\theta$ $x_2=L_2\theta$

$$F=K_1\theta\frac{L_1^2}{L}+K_2\theta\frac{L_2^2}{L}$$ کل $x=L\theta$

$$f = +K_{eq}\,x = +K_{eq}\,L\theta$$

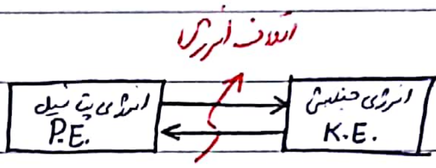
$$\Rightarrow +K_{eq}\,l\theta = K_1\theta\frac{l_1^2}{l} + K_2\theta\frac{l_2^2}{l} \Rightarrow K_{eq} = K_1\left(\frac{l_1}{l}\right)^2 + K_2\left(\frac{l_2}{l}\right)^2$$

فنرهای موازی با تصحیح نسبت بازو

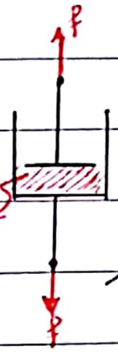
در ارتعاشات تبادل انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی داریم

انرژی پتانسیل اکثراً مربوط به فنر است و انرژی جنبشی مربوط به اینرسی خطی (m) و اینرسی دورانی (I) اجسام می‌باشد.

$T = \frac{1}{2}mv^2$ $\quad T = \frac{1}{2}I\omega^2$



اتلاف انرژی ناشی از اصطکاک و نیروهای غیر پایستار (مقاومت سیالات، ویسکوزیته و ...) است.



دمپر خطی یا ویسکوز

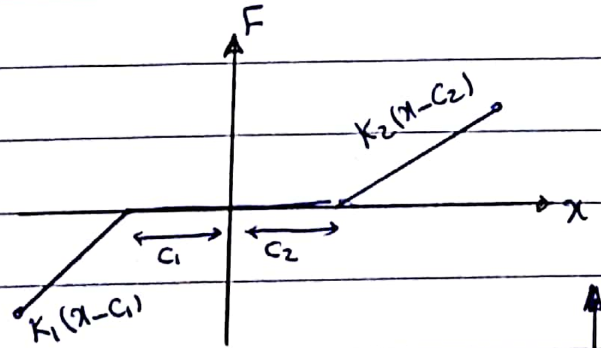
میرا کننده یا دمپر (Damper): رابطه‌ی نیرو در دمپر خطی با سرعت متناسب است

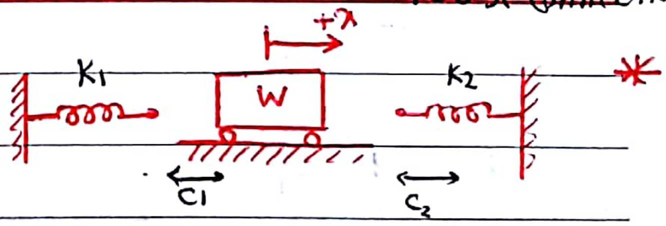
البته با تقریب می‌توان گفت

$$f = -cv$$

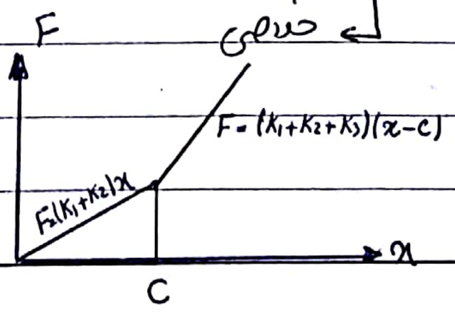
نکات آخر جلسه

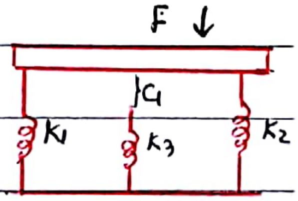
loose connection



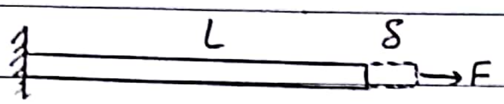


خطی



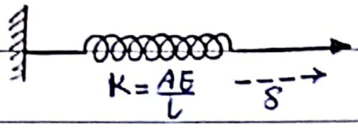


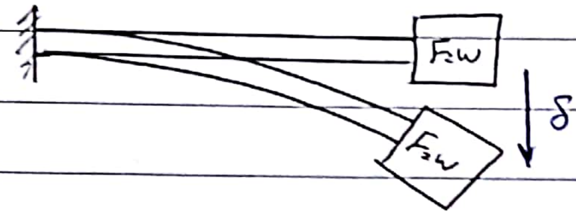
Spring constant of a Rod



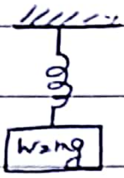
$\delta = \frac{FL}{AE}$ $F = K\delta$

$\Rightarrow F = K.\frac{FL}{AE} \rightarrow K = \frac{AE}{L}$





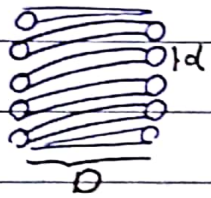
$K = \frac{3FI}{L^3}$ ممان سطح



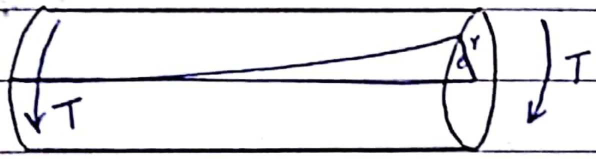
فنر لوله یا مارپیچ: که کشش آن از فرمول زیر بدست می آید.

$K = \frac{d^4 G}{8D^3 N}$

d قطر حلقه ها   D قطر متوسط فنر   G مدول برشی

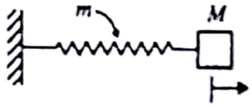


$T = \frac{GJ}{L}\theta \rightarrow K = \frac{GJ}{L}$ Torsion bar , فنر اصلی پیچشی



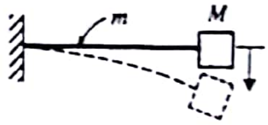
جرم معادل، سفتی معادل و میرایی معادل
برای سیستم‌های مختلف

$$m_{eq} = M + \frac{m}{3}$$



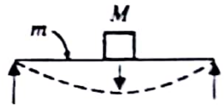
جرم M در انتهای فنر

$$m_{eq} = M + 0.23\,m$$



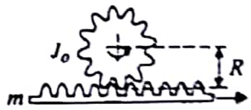
جرم M در انتهای تیر طره ای

$$m_{eq} = M + 0.5\,m$$



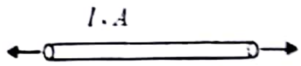
جرم M در وسط تیر ساده

$$m_{eq} = m + \frac{J_0}{R^2}$$
$$J_{eq} = J_0 + mR^2$$



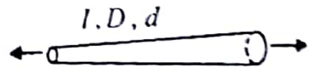
میل دنده

$$k_{eq} = \frac{EA}{l}$$



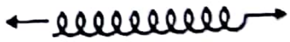
میله تحت بار محوری

$$k_{eq} = \frac{\pi EDd}{4l}$$



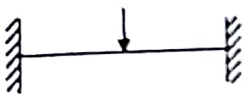
میله مخروطی تحت بار محوری

$$k_{eq} = \frac{Gd^4}{8nD^3}$$



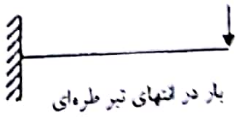
فنر پیچه‌ای

$$k_{eq} = \frac{192\,EI}{l^3}$$



بار در وسط تیر دوسر گیردار

$$k_{eq} = \frac{3EI}{l^3}$$



بار در انتهای تیر طره‌ای

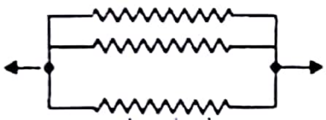
$$k_{eq} = \frac{48EI}{l^3}$$

بار در وسط تیر ساده

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_n}$$

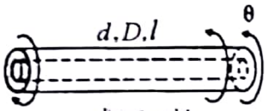
فنرهای سری

$$k_{eq} = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$$



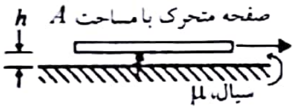
فنرهای موازی

$$k_{eq} = \frac{\pi G}{32l}(D^4 - d^4)$$

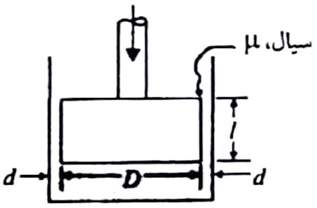


شفت توخالی

$$c_{eq} = \frac{\mu A}{h}$$

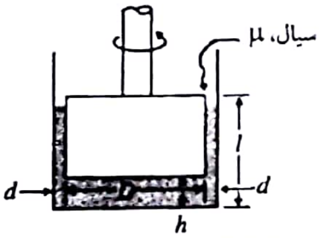


$$c_{eq} = \mu\frac{3\pi D^3 l}{4d^3}\left(1 + \frac{2d}{D}\right)$$



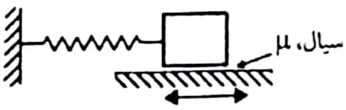
کمک فنر، پیستون با حرکت خطی

$$c_{eq} = \frac{\pi\mu D^2(l-h)}{2d} + \frac{\pi\mu D^3}{32h}$$



کمک فنر، پیستون با حرکت دوراتی

$$c_{eq} = \frac{4fN}{\pi\omega X}$$

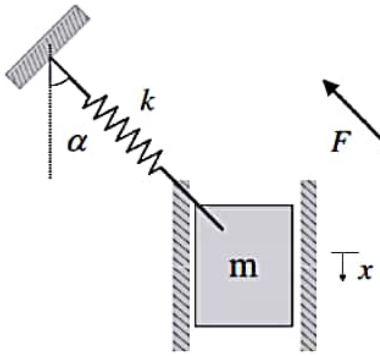


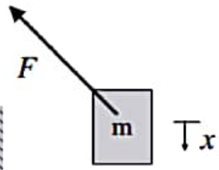
میرایی کولمب

فرکانس طبیعی

۱- فرکانس طبیعی را برای ارتعاشات کوچک سیستم‌های زیر از **روش نیوتنی** به‌دست آورید.

(الف)



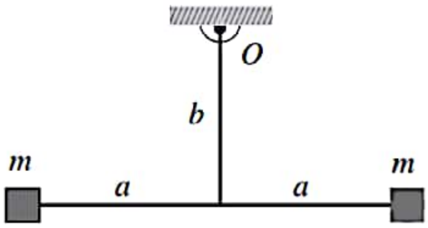


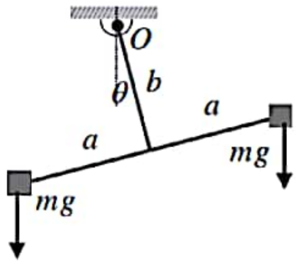
$$m\ddot{x} = -F\cos\alpha = (-kx\cos\alpha)\cos\alpha$$

$$m\ddot{x} + kx\cos^2\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k\cos^2\alpha}{m}} = \cos\alpha\sqrt{\frac{k}{m}}$$

(ب)

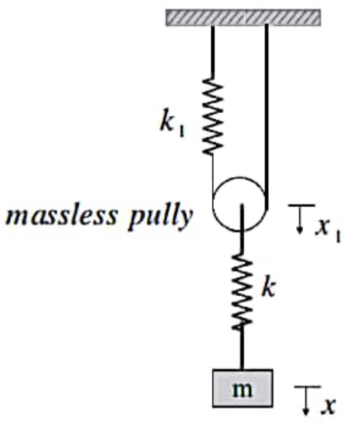


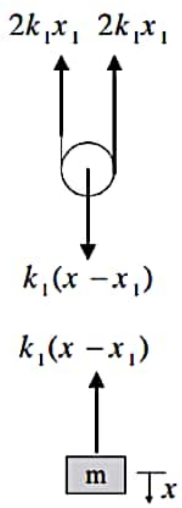


$$\Sigma M_O = I_O\ddot{\theta} \Rightarrow mg\,(a - b\sin - mg\,(a + b\sin\theta) = 2m(a^2+b^2)\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow 2m(a^2+b^2)\ddot{\theta} + 2gb\theta = 0 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{gb}{a^2+b^2}}$$

(ج)





$$\text{sup. } x > x_1 : m\ddot{x} = -k(x - x_1)$$

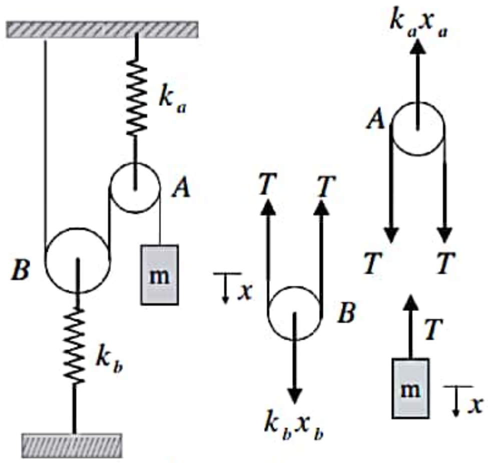
$$m\ddot{x} + k(x - x_1) = 0$$

$$4k_1x_1 = k(x - x_1) \Rightarrow x_1 = \frac{k}{k+4k_1}x$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + k\left(x - \frac{k}{k+4k_1}x\right) = 0$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + \frac{4kk_1}{k+4k_1}x = 0 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{4kk_1}{m(k+4k_1)}}$$

(د)



massless and frictionless pullies

FBD of m : $m\ddot{x} = -T$

FBD of pully A & B : $2T = k_a x_a$ & $2T = k_b x_b$

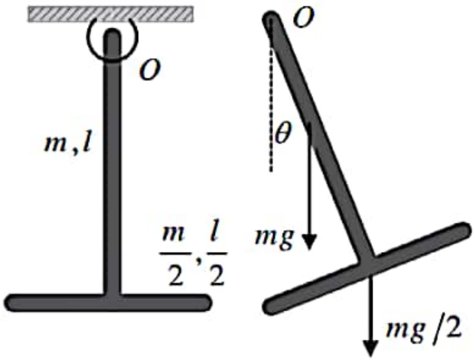
$$\Rightarrow k_a x_a = k_b x_b \Rightarrow x_b = \frac{k_a}{k_b} x_a$$

$$x = 2x_a + 2x_b = 2x_a + 2\frac{k_a}{k_b}x_a = 2\left(\frac{k_a + k_b}{k_b}\right)x_a$$

$$\Rightarrow x_a = \frac{k_b}{2(k_a + k_b)}x \Rightarrow T = \frac{k_a k_b}{4(k_a + k_b)}x \Rightarrow$$

$$m\ddot{x} = -\frac{k_a k_b}{4(k_a + k_b)}x \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k_a k_b}{4m(k_a + k_b)}}$$

(هـ)

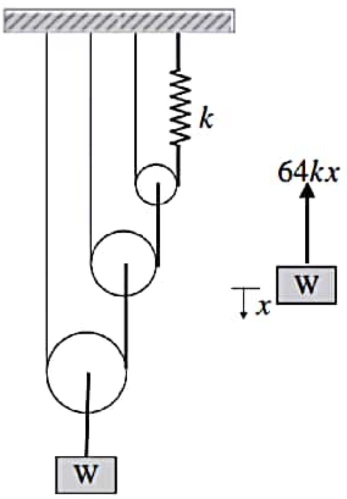


$$\Sigma M_O = I_O\ddot{\theta} \Rightarrow -mg\frac{l}{2}\sin\theta - mg\frac{l}{2}\sin\theta = I_O\ddot{\theta}$$

$$I_O = \frac{1}{3}ml^2 + \frac{1}{12}\frac{m}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{m}{2}l^2 = \frac{27}{32}ml^2 \Rightarrow$$

$$\frac{27}{32}ml^2\ddot{\theta} + mgl\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{32g}{27l}\theta = 0 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{32g}{27l}}$$

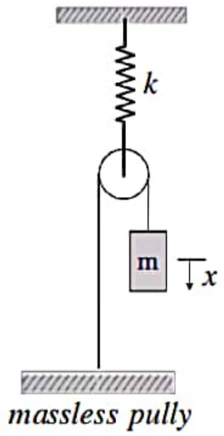
(و) هر سه قرقره بدون جرم و اصطکاک فرض می‌شوند.



$$\frac{W}{g}\ddot{x} + 64kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{64kg}{W}x = 0 \Rightarrow \omega_n = 8\sqrt{\frac{kg}{W}}$$

۲- فرکانس طبیعی ارتعاشات سیستم‌های زیر را از **روش انرژی** به‌دست آورید.

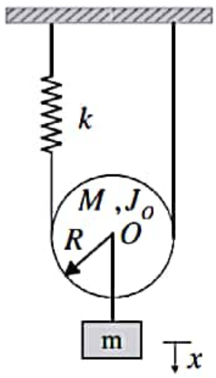
(الف)



$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2\ ,\ U=\frac{1}{2}k(\frac{x}{2})^2=\frac{1}{2}k(\frac{x^2}{4})\qquad \frac{d}{dt}(T+U)=0\Rightarrow$$

$$m\dot{x}\ddot{x}+\frac{k}{4}x\dot{x}=0\Rightarrow m\ddot{x}+\frac{k}{4}x=0\Rightarrow \omega_n=\sqrt{\frac{k}{4m}}$$

(ب)



$$T=T_M+T_m=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}J_O\dot{x}^2$$

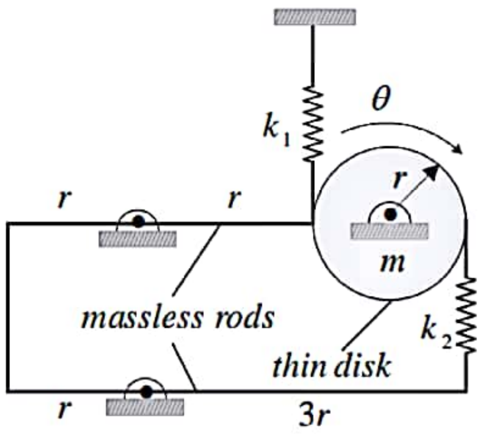
$$x=R\theta\Rightarrow T=\frac{1}{2}(m+M+\frac{J_O}{R^2})\dot{x}^2$$

$$U=\frac{1}{2}k(2x)^2=\frac{1}{2}k(4x^2)$$

$$\frac{d}{dt}(T+U)=0\Rightarrow(m+M+\frac{J_O}{R^2})\dot{x}\ddot{x}+4kx\dot{x}=0$$

$$\Rightarrow\ddot{x}+\frac{4k}{m+M+\frac{J_O}{R^2}}x=0\Rightarrow\omega_n=\sqrt{\frac{4kR^2}{m+M+J_O}}$$

(ج)



$$T=\frac{1}{2}J_O\dot{\theta}^2=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}mr^2)\dot{\theta}^2$$

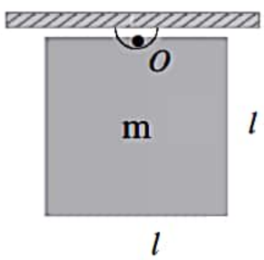
$$U=\frac{1}{2}k_1(r\theta)^2+\frac{1}{2}k_2(r\theta+3r\theta)^2$$

$$=\frac{1}{2}(k_1+16k_2)r^2\theta^2\qquad\frac{d}{dt}(T+U)=0\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}\ddot{\theta}+(k_1+16k_2)r^2\theta\dot{\theta}=0$$

$$\ddot{\theta}+\frac{2k_1+32k_2}{m}\theta=0\Rightarrow\omega_n=\sqrt{\frac{2k_1+32k_2}{m}}$$

(د)

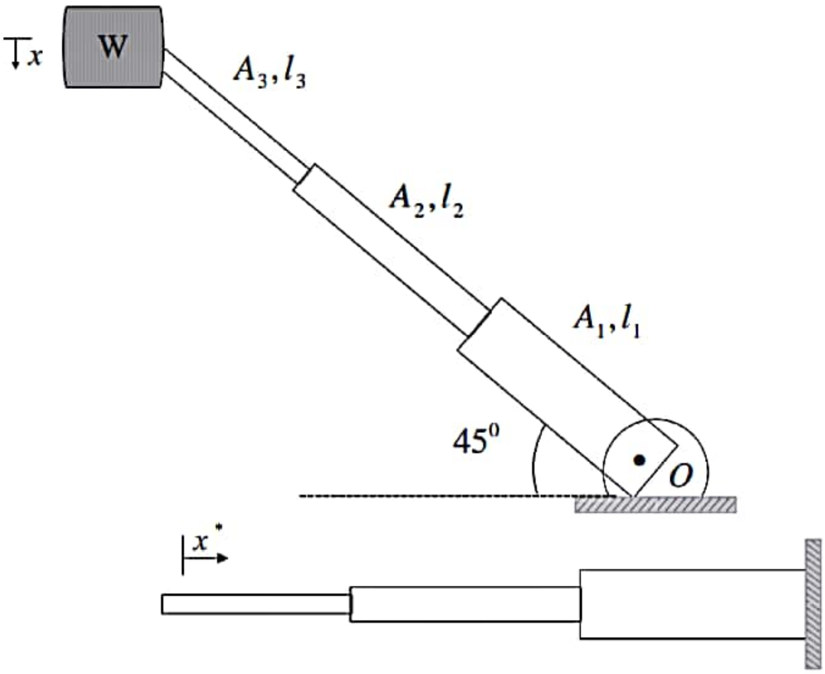


$$T=\frac{1}{2}I_O\dot{\theta}^2=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{12}m(l^2+l^2)+m(\frac{l}{2})^2\right]\dot{\theta}^2=\frac{1}{2}(\frac{5}{12}ml^2)\dot{\theta}^2$$

$$U = mg\,\frac{l}{2}(1-\cos\theta) \qquad \frac{d}{dt}(T+U)=0 \Rightarrow \frac{5}{12}ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta}+\frac{mgl}{2}\dot{\theta}\sin\theta=0$$

$$for\ small\ oscillations: \ddot{\theta}+\frac{6g}{5l}\theta=0 \Rightarrow \omega_n=\sqrt{\frac{6g}{5l}}$$

۳- اتاقک یک کامیون آتش‌نشانی در انتهای یک تیر تلسکوپی مطابق شکل قرار گرفته است. این تیر از جنس فولاد با $E = 200GPa$ و از سه قسمت با طول و سطح مقطع داده شده تشکیل شده است. اگر وزن فرد ایستاده در اتاقک به‌همراه اتاقک برابر $W = 2000N$ باشد، با فرض یک درجه آزادی بودن سیستم، فرکانس طبیعی ارتعاشات عمودی اتاقک را تخمین بزنید.



$l_1 = l_2 = l_3 = 3m$
$A_1 = 20cm^2$
$A_2 = 10cm^2$
$A_3 = 5cm^2$

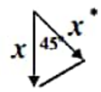
حل:

$$k_i = \frac{A_i E_i}{l_i} \quad , \quad \frac{1}{k}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_3}$$

$$k_1=\frac{20\times10^{-4}\times2.1\times10^{11}}{3}=14\times10^7\,N/m\,,\ k_2=7\times10^7\,N/m\,,\ 3.5\times10^7\,N/m$$

$$\frac{1}{k}=\frac{1}{14\times10^7}+\frac{1}{7\times10^7}+\frac{1}{3.5\times10^7}\Rightarrow k=2\times10^7\,N/m$$

$$U=\frac{1}{2}kx^{*2}=\frac{1}{2}k_{eff}x^2 \quad , \quad x^*=x\cos45^0$$



$$U=\frac{1}{2}k\,(x\cos45^0)\Rightarrow k_{eff}=k\cos^2 45^0=1\times10^7\,N/m$$

$$\Rightarrow \omega_n=\sqrt{\frac{1\times10^7}{2000/9.81}}=221.5\ rad/\sec$$