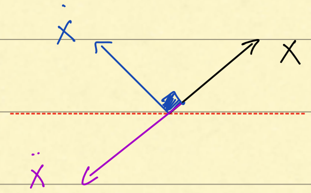
«حرکت هارمونیک»: ساده‌ترین نوع حرکت پریودیک و به صورت روبه‌رو فرمول‌بندی می‌شود ←

$\boxed{X = A\sin(\omega t)}$: $A \equiv$ دامنه ، $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \equiv$ فرکانس ، $t \equiv$ زمان



دامنه ارتعاشی

$\dot{X} = \omega A\cos(\omega t) = \boxed{\omega A}\sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$

دامنه ارتعاشی

$\ddot{X} = -\omega^2 A\sin(\omega t) = -\boxed{\omega^2 A}\sin(\omega t + \pi) \Longrightarrow \boxed{\ddot{X} = -\omega^2 X}$

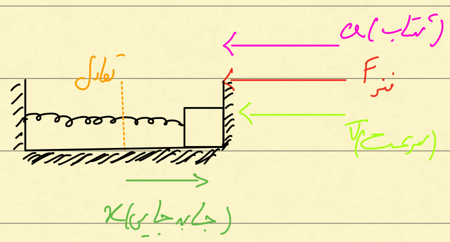
منحنی برحسب شتاب زمان متناسب با منحنی مکان زمان است با این تفاوت که مضرب $-\omega^2$ در آن ضرب شده است.

یادآوری ← $e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$: جدا کردن بخش حقیقی و موهومی

$$z_1 z_2 = A_1 A_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \qquad z^n = A^n e^{in\theta}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{A_1}{A_2}\right) e^{i(\theta_1-\theta_2)} \qquad z^{1/n} = A^{1/n} e^{i\theta/n}$$

درسیستم جرم-فنر وقتی از حالت تعادل خارج می‌شویم علامت شتاب، جابه‌جایی و سرعت عوض می‌شود و درک آن با رسم شکل بسیار آسان است. مثل شکل مقابل:



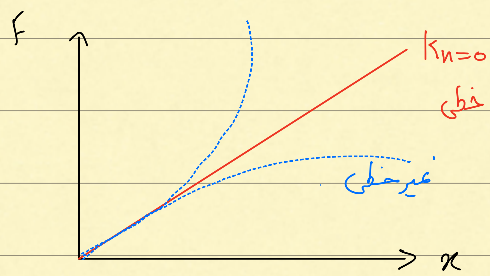
* ساده‌ترین نوع حرکت ارتعاشی، حرکت بدون میرایی است ← یعنی نیروهایی باعث از بین رفتن ارتعاش نمی‌شود مثل مقاومت هوا.

عناصر مهم سیستم ارتعاشی عبارتند از: ① اینرسی ، ② ذخیره‌کننده انرژی ، ③ نابودکننده انرژی (میرایی)

«اینرسی» ← مقدار مقاومتی که جسم در برابر سرعت انجام می‌دهد تا حالت فعلی‌اش حفظ شود، متناسب با شتاب است: $F=ma$

«انواع فنرها» ← ① فنر خطی ← $\vec{F} = k\Delta x$ ، ② پیچان ← $\vec{M} = k\theta$

③ غیرخطی ← $\vec{F} = (k_0 + k_n)x$



* فنر نیرویش متناسب با جابه‌جایی است

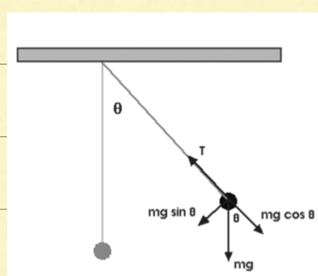
«دمپرها» ← وجود این عامل ضروری نیست ولی عامل دیگر حتمی است. و فرض ما مدل دمپر ویسکوز است

که به صورت مقابل فرمولش است: $\boxed{F = C \cdot \bar{V}}$

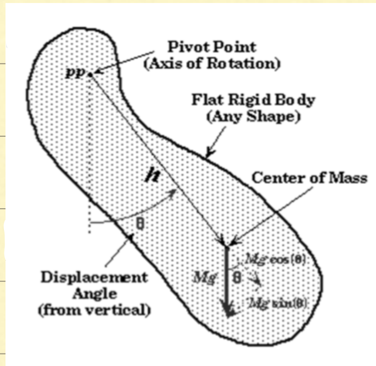
فرکانس طبیعی ← ① برای فنرها داریم ← $\boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ و $\boxed{\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0}$

* روابط بالا به راحتی و قانون دوم نیوتن بدست میاید: $F = m\ddot{x} = k\Delta x$

② برای پاندول ساده داریم ← $\boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}}}$



② برای پاندول فیزیکی و ترکیبی ← $\boxed{\omega_n=\sqrt{\frac{mgl}{J}}=\sqrt{\frac{mgl}{I+ml^2}}}$



«روش انرژی (Energy Method)» ← اگر سیستم یک سیستم بسته باشد یعنی جمع انرژی جنبشی و پتانسیل

ثابت است ← $T+U=cte$

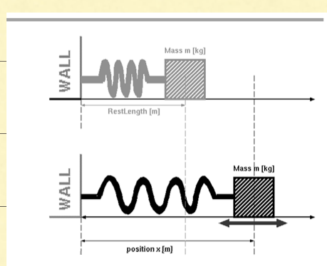
★ پس تغییرات آن برابر صفر است ← $\frac{d}{dt}(U+T)=0$

★ در حالت اولیه اگر روی مرجع انرژی پتانسیل باشیم حداکثر سرعت و حداکثر انرژی جنبشی را داریم اما اگر در دورترین فاصله

از مرجع انرژی پتانسیل باشیم سرعت ما حداقل (صفر) و پتانسیل ما حداکثر است ←

$T_1+0=0+U_2 \Longrightarrow \boxed{T_{max}=U_{max}}$

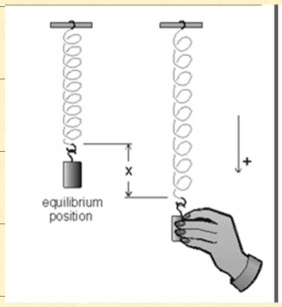
«بررسی حالت فنر با روش انرژی» ←



1) فنر افقی ← $K.E=\frac{1}{2}m\dot{x}^2 \;,\; P.E=\frac{1}{2}kx^2$

$$\frac{d}{dt}(K.E+P.E)=0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}kx^2\right)+\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right)=0 \Rightarrow kx\dot{x}+m\dot{x}\ddot{x}=0$$

$$\dot{x}(kx+m\ddot{x})=0 \xrightarrow[\text{صفر باشد مگر در شروع و پایان زمان}]{\text{در کل زمان نمی‌تواند } \dot{x} \text{ برابر}} kx+m\ddot{x}=0 \Rightarrow \ddot{x}+\frac{k}{m}x=0 \Rightarrow \boxed{\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}}$$



2) فنر عمودی ← $K.E=\frac{1}{2}m\dot{x}^2 \;,\; P.E=\frac{1}{2}k(x+\Delta)^2-mgx$

$$\frac{d}{dt}(K.E+P.E)=0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right)+\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}k(x+\Delta)^2-mgx\right)=0$$

$$m\dot{x}\ddot{x}+k(x+\Delta)\dot{x}-mg\dot{x}=0 \Rightarrow \dot{x}(m\ddot{x}+k(x+\Delta)-mg)=0$$

مثل قبل

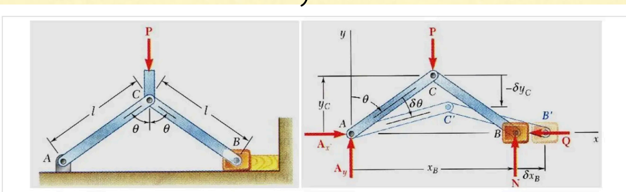
$$\Rightarrow m\ddot{x}+kx+(\boxed{k\Delta-mg})=0 \Longrightarrow m\ddot{x}+kx=0 \Rightarrow \boxed{\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

$\sum F_y=0 \Rightarrow k\Delta=mg$

* پس برای ارتعاش طبیعی مافرقی ندارد که فنر به چه صورت قرار بگیرد.

«کار مجازی» ← روشی است که می‌توان با آن جابه‌جایی‌های کوچک را محاسبه و با قرار دادن آن برابر صفر معادله را حل کرد

مثال شکل زیر که جابه‌جایی هم دارد و از این طریق می‌توان حساب کرد جابه‌جایی مجازی یعنی به چشم دیده نمی‌شود)؟



$$\delta U=\delta U_Q+\delta U_P=-Q\,\delta x_B-P\,\delta y_C=0$$

$$x_B=2l\sin\theta \;\Rightarrow\; x_B=2l\cos\theta\,\delta\theta$$

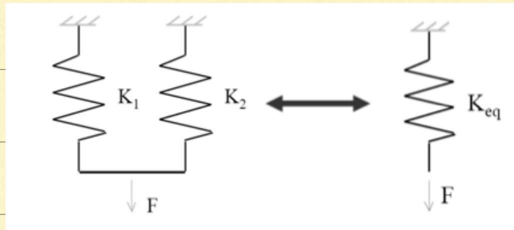
$$y_C=l\cos\theta \;\Rightarrow\; y_C=-l\sin\theta\,\delta\theta$$

$$-2Ql\cos\theta\,\delta\theta+Pl\sin\theta\,\delta\theta=0$$

$$\Rightarrow Q=\frac{1}{2}P\tan\theta$$

«انواع حالات قرارگیری فنرها» ←

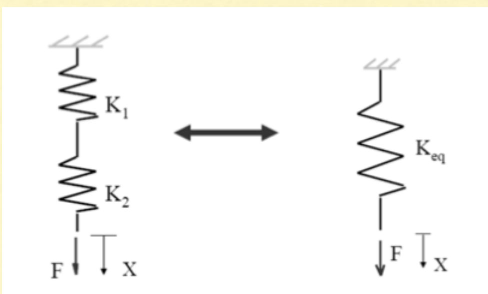
① موازی ← بصورت شکل مقابل است و اگر بجای این که یک فنر معادل بگذاریم بجای هر نیرو نیروی مقابل



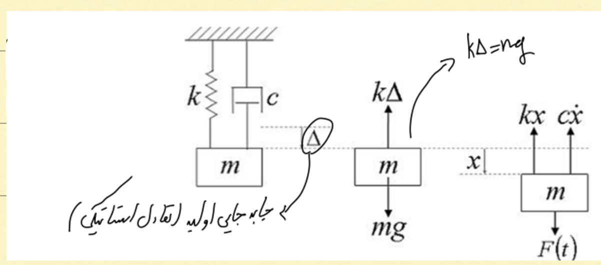
را می‌نویسیم ← $\boxed{F=k_{eq}\Delta \;:\; k_{eq}=k_1+k_2}$

② سری ← بصورت شکل مقابل است و اگر بجای ۲ فنر یک فنر معادل بگذاریم بصورت زیر این نیروی

فنر معادل بدست می‌آید ← $\boxed{F=k_{eq}\Delta \;:\; \frac{1}{k_{eq}}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}}$



«ویسکوز دمپرها» ←



بصورت مقابل است با نوشتن

معادلات تعادل بصورت زیر x

بدست می‌آید ← $\sum F=ma \Rightarrow m\ddot{x}+kx+c\dot{x}=F(t)$ $=0$ دیفرانسیل

(I)

$$\boxed{m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0} \xrightarrow{x=e^{st}} (ms^2+cs+k)e^{st}=0 \Rightarrow s^2+\frac{c}{m}s+\frac{k}{m}=0$$